УДК 378.147:514.18

Волошинов Д.В.
Д-р техн. наук, профессор,
Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций,
Россия, 193232, Санкт-Петербург,
пр. Большевиков д. 22, корп. 1,
e-mail: denis.voloshinov@yandex.ru;

ВИЗУАЛЬНО-ГРАФИЧЕСКОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЕДИНОЙ КОНСТРУКТИВНОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ АНАЛОГОВ ЗАДАЧИ АПОЛЛОНИЯ С УЧЕТОМ МНИМЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБРАЗОВ

Аннотация. Задача Аполлония о построении окружностей, касательных к трем произвольно заданным окружностям плоскости, является одной из хорошо изученных задач классической геометрии. Материалы представляемой статьи направлены на разработку единой теории решения задачи Аполлония, учитывающей не только действительные, но и незримо присутствующие в ней комплекснозначные образы. В статье показано, что фундаментальные геометрические конструкции, лежащие в основе задачи Аполлония, оказываются применимыми не только к вещественным, но и к комплекснозначным данным, что позволяет устранить множество ныне существующих в ней исключений. В работе вскрыт фундаментальный характер задачи Аполлония, продемонстрирована ее тесная взаимосвязь с проективными и квадратичными геометрическими преобразованиями. Доказано, что задача Аполлония и ее аналоги имеют единый метод решения, в отличие от бытующего представления о том, что данные задачи могут быть решены только отдельными частными способами. Предложенная автором концепция геометрического эксперимента позволила обнаружить многие ранее неизвестные и обсуждаемые в статье закономерности, благодаря проведению множества вычислительных испытаний в системе визуального проектирования геометрических моделей Симплекс. В статье рассматривается пример решения аналога задачи Аполлония для трехмерного пространства, однако действие алгоритма универсально, и он может быть с равным успехом применен к решению подобных задач в пространствах произвольных размерностей. Полученные результаты демонстрируют возможности методов конструктивного моделирования и многомерной начертательной геометрии в приложении к решению сложных математических задач, определяют тенденции развития систем автоматизации конструктивного геометрического моделирования.

Ключевые слова: научная визуализация; конструктивное геометрическое моделирование; геометрический эксперимент; проективная геометрия; задача Аполлония; мнимые геометрические образы.

D.V. Voloshinov
Doctor of Engineering, Professor,
St.-Petersburg State University of Telecommunications,
22 bld. 1, Prospect Bolshevikov, St.-Petersburg, 193232, Russia
e-mail: denis.voloshinov@yandex.ru;

VISUAL-GRAPHIC DESIGN OF THE UNITARY CONSTRUCTIVE MODEL TO SOLVE ANALOGUES OF APOLLONIUS PROBLEM INCLUDING IMAGINARY GEOMETRY

Abstracts. The problem of Apollonius on the construction of circles, tangent to three arbitrary circles of given plane, is one of the well-studied problem of classical geometry. The article is devoted to development a unified theory for solving the problem of Apollonius, taking into account the presence not only real, but also complex-valued images in its solution. The article shows, that the fundamental geometric structures of the Apollonius problem, are applicable not only to real, but also to complex-valued data, which helps to eliminate many currently existing, but not systematized exceptions. It is proved that the problem of Apollonius and its analogues have a single method for their solution, in contrast to the prevailing idea that these problems can be solved only by separate particular methods. The concept of geometric experiment proposed by the author allowed to find out many previously unknown properties of geometry objects, due to the set of computational tests in the system Simplex, suitable for visual design of geometric models. The article considers an example of solving an analogue of the Apollonian problem for three-dimensional space, but performed algorithm is universal, and it can be successfully applied to solving similar problems in spaces of arbitrary dimensions. The obtained results demonstrate the capabilities of the methods of constructive modeling and multidimensional descriptive geometry in the application to the solution of complex mathematical problems, determine the trends in the development of automation systems of constructive geometric modeling.

Keywords: scientific visualization, constructive geometric modeling, geometric experiment, projective geometry, the problem of Apollonius, imaginary geometric objects.

1. Введение

В настоящее время приходится с сожалением констатировать, что исследования в области конструктивной геометрии проводятся с недостаточной интенсивностью. Несмотря на, казалось бы, бурное развитие информационных технологий, конструктивная геометрия до сих пор не получает должной поддержки от разработчиков программных систем. Геометрия по сей день воспринимается, как достаточно сложная, рутинная и даже устаревшая наука, которая не находит себе должного практического применения, в то время как цифровые (аналитические) методы математики приковывают к себе внимание начинающих исследователей благодаря высокой эффективности реализации таки методов в виде компьютерных программ и систем. Безусловно, существуют попытки использовать для популяризации геометрических знаний и даже проведения научных исследований программные комплексы, предназначенные для автоматизации проектирования и программирования.

В отличие от аналитики, геометрия обладает неоспоримым преимуществом, заключающемся в способности доставлять человеку информацию о моделях окружающего мира через зрительный канал. Геометрия образна и визуальна, и поэтому к ней обращены взоры многих исследователей, стремящихся представить результаты своих достижений в наглядной, доступной для понимания форме. И,

без сомнения, это стремление показывает впечатляющие результаты. Однако, сущность геометрии заключается не только в этом. Предоставляя возможность оперирования наглядными образами и представлениями, геометрическая наука позволяет исследовать сложнейшие закономерности мироздания, дает возможность заглянуть в миры, которые недоступны обычному человеческому взору. Складывается парадоксальная ситуация: с одной стороны, геометрическая интерпретация – это шанс осознать нечто, заглянув туда, где обычным глазом ничего не видно, не осязаемо. С другой стороны, выстраивание логических умозаключений в геометрии требует специальных знаний, умения мыслить абстрактными образами и тренировки. На пути к овладению этими знаниями немало проблем, и основная из них – это высокая трудоемкость достижения результата. В частности, одна из проблем – это существование в математических задачах мнимых решений [13, 18], которые относительно легко воспринимаются как результат математических действий, но не находят должного понимания в системе геометрических представлений.

Несмотря на то, что мнимые образы в геометрии не являются чем-то концептуально новым, практическое использование таких образов затруднено, поскольку их отображение на действительной плоскости требует косвенных визуальных интерпретаций и выполнения множества дополнительных операций. Еще в 1847 г. Штаудт в работе [30] сформулировал теорию мнимых элементов применительно к проективной геометрии и предложил, в частности, косвенно отображать мнимые точки четверками действительных точек на прямой линии. Несмотря на действенность такого подхода и принципиальную возможность оперирования мнимыми образами через заменяющие их реперы, практическая целесообразность таких замен может быть оценена по достоинству лишь в узком кругу специалистов, имеющих соответственную геометрическую подготовку. И, следовательно, такому подходу вряд ли найдется место в практике повседневного инженерного проектирования в среде людей, не знакомых со специальными разделами геометрии.

Высокая трудоемкость воплощения теоретических моделей в практически значимые расчетные приложения, недопонимание их сути и, вследствие этого, отсутствие ясного представления о сферах приложения этих моделей к реальному проектированию, в конце концов, влекут за собой и снижение интереса к проведению научных изысканий в области конструктивного геометрического моделирования. Отсюда также проистекает и недостаточное внимание

разработчиков САПР и систем автоматизации научных исследований к созданию компьютеризированных инструментов, пригодных для работы с геометрическими объектами мнимой природы.

По изложенным выше причинам рассчитывать на успех в деле разработки конструктивных геометрических моделей, учитывающих и действительные, и мнимые геометрические образы, на основе традиционных методов исполнения и визуализации этих моделей в виде графических схем, не приходится. Нет сомнения в том, что пришло время отказаться от прочно укоренившегося стереотипа, навязывающего понимание науки «геометрия» как системы знаний о действиях, выполняемых с помощью циркуля и линейки. Необходимо перейти к иной парадигме. Средства компьютерного моделирования позволяют создавать и практически применять новые виртуальные инструменты с ранее недоступной исследователям функциональностью, которые способны придать мощный импульс научным изысканиям в области конструктивной геометрии и, соответственно, расширить сферы практического приложения геометрического метода. Более того, и традиционные инструменты в компьютерном исполнении приобретают новые качества. Например, компьютеризированный циркуль относительно несложно наделить способностью проводить не только привычные действительные окружности, но и окружности мнимого радиуса в мнимом центре, причем геометрическая сущность самого действия – проведение окружности – от этого не претерпевает никаких изменений. Этот подход исключительно важен и ценен тем, что геометрия, приобретающая подобные инструменты, в глазах осведомленного практика становится по-настоящему полной и значимой.

Концепция создания виртуальных геометрических инструментов, помимо совершенствования геометрической теории, основанная на понимании геометрических конструкций как преобразователей информации – геометрических машин [4, 10], влечет за собой и развитие нового направления научных исследований. Его предметом являются информационные системы представления данных, выраженных в геометрической форме, и средства управления ими посредством визуального графического интерфейса. Практическим результатом этих исследований должна стать разработка информационных систем, предназначенных для автоматизации представления и приложения геометрических знаний, реализации конструктивных геометрических моделей в виде действующих компьютерных программ, готовых к применению в тех областях человеческой деятельности, в которых визуализация является неотъемлемой частью процессов

познания, проектирования и управления. Новые информационные средства позволяют сформулировать и развивать концепцию геометрического эксперимента, предназначенного для проверки научных гипотез и изучения ранее неизвестных свойств геометрических конструкций [7–11].

Задача Аполлония, рассматриваемая в данной статье как пример, иллюстрирующий высказанные соображения, являет собой исключительно изящный и убедительный образец единства геометрической природы действительных и мнимых образов. Учет этого единства позволяет разработать и применять всего один общий конструктивный алгоритм ее решения, свободный от частных исключений, неизбежно присутствующих в ранее известных алгоритмах.

Впервые задача о сопряжении окружностей была сформулирована и решена Аполлонием Пергским примерно в 220 г. до н. э. Частичное решение задачи Аполлония о построении круга, касающегося трёх данных, Франсуа Виет представил в сочинении *Apollonius Gallus* (1600) [29]. Как известно, решение Виета не подходит для случая внешних касаний. Жозеф Диас Жергонн в 1816 г. разработал изящное решение этой задачи. Многие аспекты решения данной задачи и ряда смежных проблем приводятся в работах [1–3, 6, 15, 17, 19-26].

В классической постановке задача Аполлония формулируется следующим образом: пусть на плоскости даны три несовпадающие и неконцентрические в парах окружности; требуется построить пару окружностей, сопрягающих три заданные окружности. В плоскости задача имеет четыре различные решения – четыре пары окружностей, сопрягающих заданные. Условие задачи легко распространяется и на пространства б*о*льших размерностей. В трехмерном пространстве задача будет сформулирована применительно к сферам. Не составит труда распространить формулировку задачи на четырехмерное пространство и, в принципе, пространство любого измерения. Разумеется, при увеличении числа измерений, количество построений, необходимых для решения задачи, возрастает.

Как уже говорилось, теоретически, задача Апполония имеет не только вещественные, но и мнимые решения, которые не удается представить в приемлемой визуальной форме, пригодной для выполнения дальнейших операций над получаемыми мнимыми образами с помощью традиционных инструментальных средств. Позиционные отношения, возникающие между исходными окружностями (или гиперсферами в многомерных случаях), приводят к появлению исключительных ситуаций, при которых построение касательных окружностей (гиперсфер) оказывается невозможным. Более того, сама задача

Аполлония, в принципе, может быть поставлена над исходными данными, имеющими мнимую природу, что еще сильнее усугубляет ситуацию. Однако, как уже было сказано ранее, эти исключения обусловлены только инструментальными ограничениями геометрической науки, решения которой принято оформлять в виде чертежей простейшими средствами – циркулем и линейкой. Еще раз подчеркнем, что на сам предмет науки эти ограничения оказывать влияние не могут. Но техническая невозможность оперативной работы с мнимыми геометрическими образами лишает поиск теоретических обобщений, направленных на выявление геометрической сущности данной задачи, практического смысла, не позволяет рассматривать ее как цельное звено единой геометрической системы.

Ниже мы рассмотрим ряд теоретических положений и методов использования компьютерных средств визуализации и проектирования геометрических моделей, которые позволят найти не только общее проективное решение задачи Аполлония, но и в равной степени распространить принцип ее решения на пространства размерностей, выше, чем вторая [5, 12, 14, 27, 28]. Причем для решения задач в многомерных пространствах нам понадобятся только средства плоской геометрии. В рассматриваемых алгоритмах будут учтены и мнимые решения, и возможность задания в качестве исходных данных объектов с чисто мнимыми и комплексными значениями. Проектирование и исследование алгоритмов, а также визуальное сопровождение этого процесса осуществляется в среде системы конструктивного геометрического моделирования Симплекс [9, 10].

2. Построение, свойства и методы визуализации окружностей с мнимым радиусом

Пусть в плоскости задана некоторая окружность i. Эта окружность индуцирует в плоскости преобразование инверсии I [3, 15], которое устанавливает в парах точек $(A-A')$ инволюционное соответствие $A'=\mathrm{I}(A)$ в соответствии со следующим определением: произведение расстояний от центра C окружности инверсии i до точек пары $(A-A')$ равно квадрату радиуса R_i окружности инверсии i:

$$\sqrt{(x_A-x_c)^2+(y_A-y_c)^2}\sqrt{(x_{A^*}-x_c)^2+(y_{A^*}-y_c)^2}=R_i^2$$

Из определения инверсии следует, что произвольная окружность k, не проходящая через центр окружности i, преобразуется в инверсии I в окружность

$k' = \mathrm{I}(k)$. Окружность m, проходящая через центр C окружности i, преобразуется в прямую линию $m' = \mathrm{I}(m)$, проходящую через точки $P, Q = m \times i = m' \times i$. Заметим, что в зависимости от позиционных характеристик окружностей i и k значения координат точек P и Q могут быть действительными или комплексными. Назовем задачу поиска образа объекта относительно окружности инверсии прямой задачей (рис. 1).

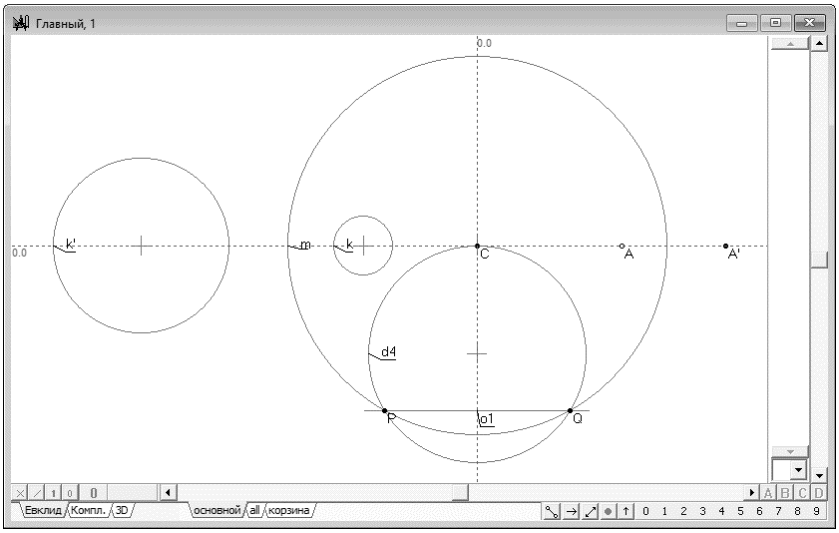

Рис. 1. Геометрическая схема преобразования точки, прямой и окружности в инверсии относительно окружности

Сформулируем обратную задачу. Пусть в плоскости заданы две произвольные окружности a и b. Требуется определить инверсию I, переводящую окружности a и b друг в друга: $a = \mathrm{I}(b)$, $b = \mathrm{I}(a)$ и найти ее репер.

Для решения данной задачи выполним построение в соответствии со следующим алгоритмом:

1. Найдем центры C_a и C_b окружностей a и b и проведем через них прямую линию $l = C_a \circ C_b$.
2. Построим точки $A_1, A_2 = a \times l$ и точки $B_1, B_2 = b \times l$.

Четыре точки A_1, A_2, B_1 и B_2, инцидентные с прямой l, задают на в рядах точек этой прямой три принципиально различные инволюции ξ_1, ξ_2 и ξ_3 [12, 14, 28]:

1. Инволюция вида $\xi_1 \left| \begin{matrix} A_1, B_1 \\ A_2, B_2 \end{matrix} \right.$. Двойные точки U_1 и V_1 инволюции ξ_1 (вещественные или мнимые), взятые как диаметральные, определяют окружность $f_1(U,V)$, центр C_f которой, взятый в качестве основания перпендикуляра, проведенного к прямой l, задает радикальную ось r_x окружностей a и b.

2. Инволюция вида $\xi_2 \left| \begin{matrix} A_1, A_2 \\ B_1, B_2 \end{matrix} \right.$. Двойные точки U_2 и V_2 инволюции ξ_2 (вещественные или мнимые), взятые как диаметральные, определяют окружность $i_2(U,V)$. Окружность i_2 определяет инверсию I_2, переводящую окружности a и b друг в друга. Центр C_2 окружности i_2 является геометрическим местом пересечения общих касательных (первого рода), проведенных к окружностям a и b.

3. Инволюция вида $\xi_3 \left| \begin{matrix} A_1, A_2 \\ B_2, B_1 \end{matrix} \right.$. Двойные точки U_3 и V_3 инволюции ξ_3 (вещественные или мнимые), взятые как диаметральные, определяют окружность $i_3(U,V)$. Окружность i_3 определяет инверсию I_3, переводящую окружности a и b друг в друга. Центр C_3 окружности i_2 является геометрическим местом пересечения общих касательных (второго рода), проведенных к окружностям a и b.

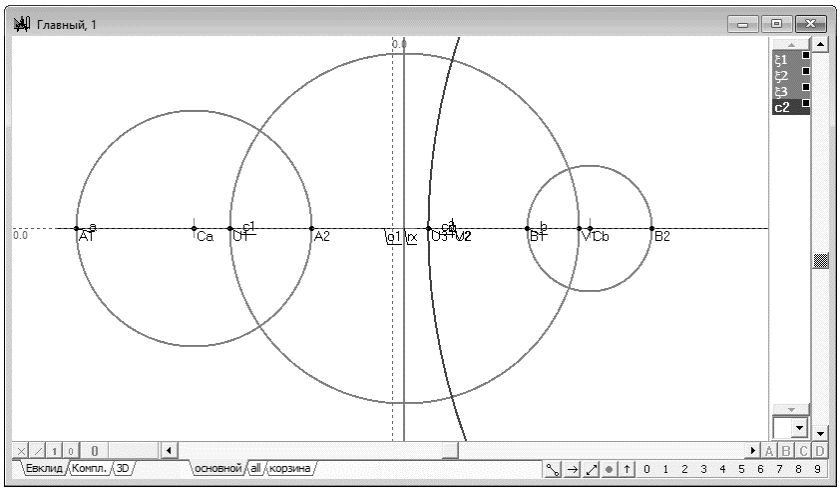

Рис. 2. Образование вещественных и мнимых радикальной и инверсионных окружностей на двойных точках инволюций в прямолинейных точечных рядах

Анализ представленных геометрических конструкций позволяет прийти к заключению, что на плоскости существует пара окружностей, задающих две различные инверсии I_2 и I_3, которые переводят окружности a и b друг в друга одинаковым образом, причем при действительных исходных данных одна из таких окружностей может быть мнимой, но иметь вещественный центр.

Инволюция первого вида позволяет получить двойные точки и провести окружность, через центр которой проходит радикальная ось. Обычно, под радикальной осью понимают прямую, которую ассоциируют с окружностью бесконечно большого радиуса, тем более, что эта прямая проходит через те же центры пучка окружностей, компонентами которого являются окружности i_2 и i_3. Однако, как известно, все окружности плоскости, являясь частными случаями кривых второго порядка, проходят через две фиксированные мнимые циклические точки, расположенные на бесконечно удаленной прямой. Называя радикальную ось окружностью бесконечно большого радиуса, следовало бы предположить, что она, радикальная ось, будучи окружностью, должна была бы тоже проходить через циклические точки, чего, однако, не происходит. Поэтому следует заключить, что представление радикальной оси в виде прямой линии не отражает истинного существа обсуждаемого геометрического феномена. Приписывая радикальную ось к окружностям, следует добавить к ней и бесконечно удаленную прямую. Она проходит через обычно не учитываемые циклические точки пересечения окружностей и, тем самым, позволяет устранить возникающую неполноту решений, которая возникает при анализе некоторых задач, например, в задаче по преобразованию двух произвольных коник в окружности [16] средствами квадратичных инволюций. К сожалению, анализ такой задачи выходит за рамками тематики данной статьи, а в текущем повествовании учет бесконечно удаленной прямой, как компонента радикальной окружности, не является существенным. Поэтому пока, без потери общности, будем считать радикальную ось прямой линией и не делать не этом акцента в рассуждениях. И лишь для иллюстрации высказанных соображений покажем результат действия геометрической машины, осуществляющей построение окружности, проводимой через три не расположенные на одной прямой точки, одна из которых перемещается по произвольному направлению к бесконечно удаленной прямой (рис. 3). Как видно из динамики сцены, изменяющаяся окружность, «спрямляется» и визуально переходит в прямую, когда смещаемая точка достигает бесконечности. Однако, если считать окружность прямой линией, то получается, что прямая линия

проходит через три точки, не лежащие на одной прямой, что противоречит аксиоматике. Приведенные рассуждения и иллюстрация дают пояснения к обсуждаемому здесь феномену, а также лишний раз подчеркивают важность визуализации и анализа динамики работы геометрических машин, позволяющих обнаруживать новые аспекты давно устоявшейся теории геометрии.

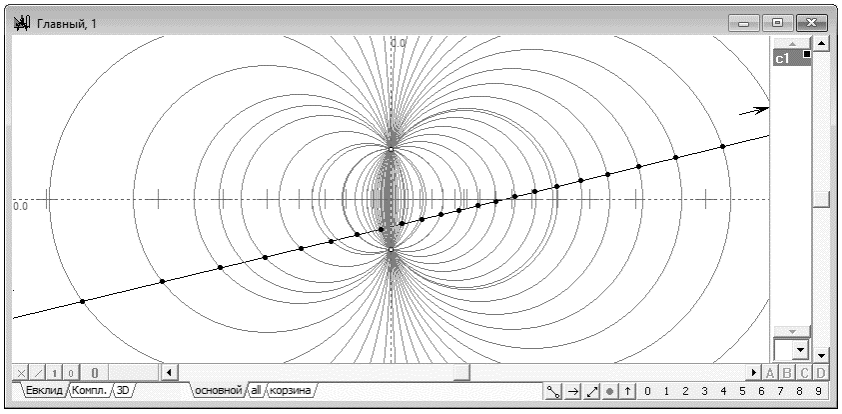

Рис. 3. Геометрическая схема к обоснованию неполноты понятия радикальной оси без учета феномена бесконечности

Для обеспечения возможности работы с мнимыми объектами в системе Симплекс предусмотрены следующие средства:

1. Введены два режима отображения объектов, которые выбираются соответственными закладками в окнах конструирования геометрического алгоритма: режим отображения «Евклид» и режим «Комплексная плоскость».
2. В режиме «Евклид» мнимые точки, в отличие от вещественных, изображаемых кружком, представляются маркерами в виде перечеркнутых квадратов. Причем для мнимых точек в действительной плоскости отображается только вещественные компоненты координат. Этот прием позволяет интерактивно взаимодействовать с такими точками так же, как и с вещественными. Изображения комплексно-сопряженных точек накладываются друг на друга. В режиме «Комплексная плоскость» и комплекснозначные, и мнимые точки отображаются связанными парами точек, в которых представлены вещественные и мнимые компоненты их координат.
3. Линейные комплекснозначные объекты отображаются метками и сопутствующими знаками. Так, например, в режиме «Евклид» окружность с вещественным центром, но комплекснозначным радиусом

будет представлена осевым горизонтально-вертикальным перекрестием, соответствующим точке центра этой окружности, а также дополнительной меткой темно синего цвета. Этот прием позволяет взаимодействовать с такой окружностью в системе теми же средствами, что приняты и для действительных образов. Схожими средствами отображаются и окружности с комплекснозначным центром. Центр такой окружности отображается в виде наклонного перекрестия, которое проходит через точку, соответствующую действительным компонентам этого центра; помимо этого в системе отображается и темно-синяя метка окружности.

4. Комплекснозначные прямые линии отображаются в системе Симплекс темно-бордовыми метками.

Приемы работы с комплекснозначными образами в системе Симплекс постоянно совершенствуются, поэтому в ближайшее время следует ожидать расширение набора средств управления такими объектами и совершенствования методов их визуализации.

3. Построение и отображение окружности, ортогональной к трем заданным окружностям

Пусть на плоскости заданы три окружности a, b и c (рис. 4). Найдем центры C_a, C_b и C_c этих окружностей и проведем через них прямые $ab = C_a \circ C_b$, $ac = C_a \circ C_c$, $bc = C_b \circ C_c$. Построим точки пересечения прямых с окружностями, через центры которых они проходят: $M_1, N_1 = ab \times a$, $M_2, N_2 = ab \times b$, $K_1, L_1 = ac \times a$, $K_2, L_2 = ac \times c$, $R_1, S_1 = bc \times b$, $R_2, S_2 = bc \times c$. На каждой из сторон образуется по четыре точки $M_1, N_1, M_2, N_2 \sim ab$, $K_1, L_1, K_2, L_2 \sim ac$, $R_1, S_1, R_2, S_2 \sim bc$. Определим с их помощью три инволюции третьего типа: $\xi_{ab}\left|\begin{matrix} M_1, N_1 \\ M_2, N_2 \end{matrix}\right.$, $\xi_{ac}\left|\begin{matrix} K_1, L_1 \\ K_2, L_2 \end{matrix}\right.$, $\xi_{bc}\left|\begin{matrix} R_1, S_1 \\ R_2, S_2 \end{matrix}\right.$.

Найдем двойные точки этих инволюций: $U_1, U_2 = \overset{2}{\xi}_{ab}$, $V_1, V_2 = \overset{2}{\xi}_{ac}$, $W_1, W_2 = \overset{2}{\xi}_{bc}$ – в общем числе шесть штук. Взяв любые три точки из этого набора, проведем через них окружность v. Построенная окружность является окружностью, ортогональной к трем заданным окружностям a, b и c (рис. 4).

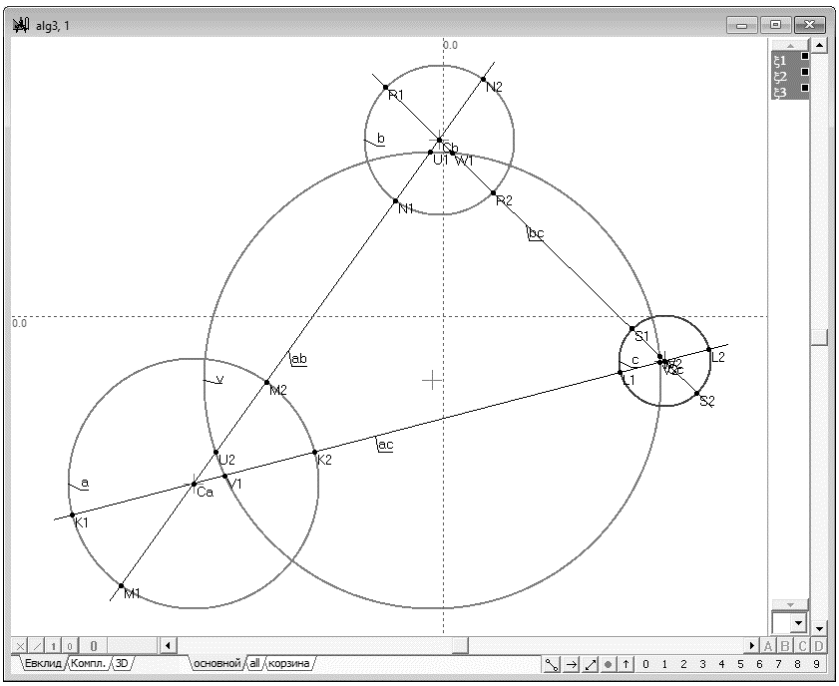

Рис. 4. Геометрическая машина, осуществляющая построение окружности, ортогональной к трем заданным окружностям

4. Общее решение задачи Аполлония

Пусть на плоскости заданы три произвольные (но не концентрические в парах) окружности a, b и c. Найдем центры этих окружностей $Ca_{\odot a}$, $Cb_{\odot b}$ и $Cc_{\odot c}$. Построим треугольник, взяв полученные точки за вершины. В предположении, что стороны треугольника $ab = Cb \circ Ca$, $ac = Cc \circ Ca$, $bc = Cc \circ Cb$ являются бесконечными прямыми, пересечем стороны с окружностями, через центры которых они проходят: $A_1, A_2 = ab \times a$, $B_1, B_2 = ab \times b$, $C_1, C_2 = ac \times a$, $D_1, D_2 = ac \times c$, $E_1, E_2 = bc \times b$, $F_1, F_2 = bc \times c$.

Определим на прямых три инволюции первого рода: $\eta_1 \mid \begin{matrix} ab; A_1; B_1 \\ ab; A_2; B_2 \end{matrix}$, $\eta_2 \mid \begin{matrix} ac; C_1; D_1 \\ ac; C_2; D_2 \end{matrix}$ и $\eta_3 \mid \begin{matrix} bc; E_1; F_1 \\ bc; E_2; F_2 \end{matrix}$. Найдем двойные точки инволюций $U_1, U_2 = \overset{2}{\eta_1}$; $V_1, V_2 = \overset{2}{\eta_2}$; $W_1, W_2 = \overset{2}{\eta_3}$. Выбрав любые три точки из полученных шести построим на них окружность $d = U_1 \circ V_1 \circ W_1$. Окружность d является ортогональной к исходным окружностям a, b и c.

Воспользуемся теперь инволюциями первого и второго рода, определенными точками пересечения окружностей с соответственными сторонами

треугольника. Определим их: $\zeta_1 | \begin{matrix} ab; A_1; A_2 \\ ab; B_2; B_1 \end{matrix}$, $\xi_1 | \begin{matrix} ab; A_1; A_2 \\ ab; B_1; B_2 \end{matrix}$, $\zeta_2 | \begin{matrix} ac; C_1; C_2 \\ ac; D_2; D_1 \end{matrix}$, $\xi_2 | \begin{matrix} ac; C_1; C_2 \\ ac; D_1; D_2 \end{matrix}$, $\zeta_3 | \begin{matrix} bc; E_1; E_2 \\ bc; F_2; F_1 \end{matrix}$, $\xi_3 | \begin{matrix} bc; E_1; E_2 \\ bc; F_1; F_2 \end{matrix}$. Построим двойные точки инволюций: $G_1, G_2 = \overset{2}{\zeta_1}$, $H_1, H_2 = \overset{2}{\xi_1}$, $I_1, I_2 = \overset{2}{\zeta_2}$, $J_1, J_2 = \overset{2}{\xi_2}$, $K_1, K_2 = \overset{2}{\zeta_3}$, $L_1, L_2 = \overset{2}{\xi_3}$. Каждая пара двойных точек, взятых как диаметральные, задает окружности (вещественные и/или мнимые): $g = G_1 \circ G_2$, $h = H_1 \circ H_2$, $i = I_1 \circ I_2$, $j = J_1 \circ J_2$, $k = K_1 \circ K_2$, $l = L_1 \circ L_2$. Найдем центры полученных окружностей: $Cg_{\odot g}$, $Ch_{\odot h}$, $Ci_{\odot i}$, $Cj_{\odot j}$, $Ck_{\odot k}$, $Cl_{\odot l}$. На этих точках построим четыре оси подобия окружностей: $gik = Cg \circ Ci \circ Ck$, $hjk = Ch \circ Cj \circ Ck$, $hli = Ch \circ Cl \circ Ci$, $glj = Cg \circ Cl \circ Cj$.

Покажем алгоритм построения пары окружностей, касательных к заданным окружностям a, b и c на примере использования оси подобия gik. Остальные решения могут быть легко получены заменой оси подобия gik на необходимую.

Будем считать ось подобия gik окружностью бесконечно большого радиуса. Проведем три окружности, перпендикулярно к gik, d и каждой из исходных окружностей a, b и c. $\bigcirc r: r \perp gik$, $r \perp d$, $r \perp a$; $\bigcirc s: s \perp gik$, $s \perp d$, $s \perp b$; $\bigcirc t: t \perp gik$, $t \perp d$, $t \perp c$. Найдем точки пересечения полученных окружностей с соответствующими им исходными окружностями: $R_1, R_2 = a \times r$, $S_1, S_2 = b \times s$, $T_1, T_2 = t \times c$. Соединив полученные точки, получаем искомые окружности $e_1 = R_1 \circ S_1 \circ T_1$, $e_2 = R_2 \circ S_2 \circ T_2$ (рис. 5).

Порядок выбора точек требует некоторых пояснений. Окружность d является окружностью инверсии для только что построенных окружностей e_1 и e_2. Центр этой окружности является радикальным центром системы окружностей a, b и c. Пары точек R_1, R_2, T_1, T_2 и S_1, S_2 расположены на прямых, проходящих через радикальный центр и разделяются окружностью d. Вследствие этого перечисленные точки могут быть упорядочены и точкам, находящимся в единой области, разграниченной окружностью d, должен быть предписан одноименный индекс. Тогда соединение точек в окружность подчинено следующему правилу: если центры сопрягаемых окружностей находятся в общей полуплоскости, разграниченной осью подобия окружностей, то окружности сопряжения проходят через точки с одноименными индексами. Если какая-либо из окружностей имеет центр, расположенный в противоположной полуплоскости, то индекс точки, через

которую проходит сопрягаемая окружность, противоположен индексам точек, соответствующих окружностям, противоположной полуплоскости.

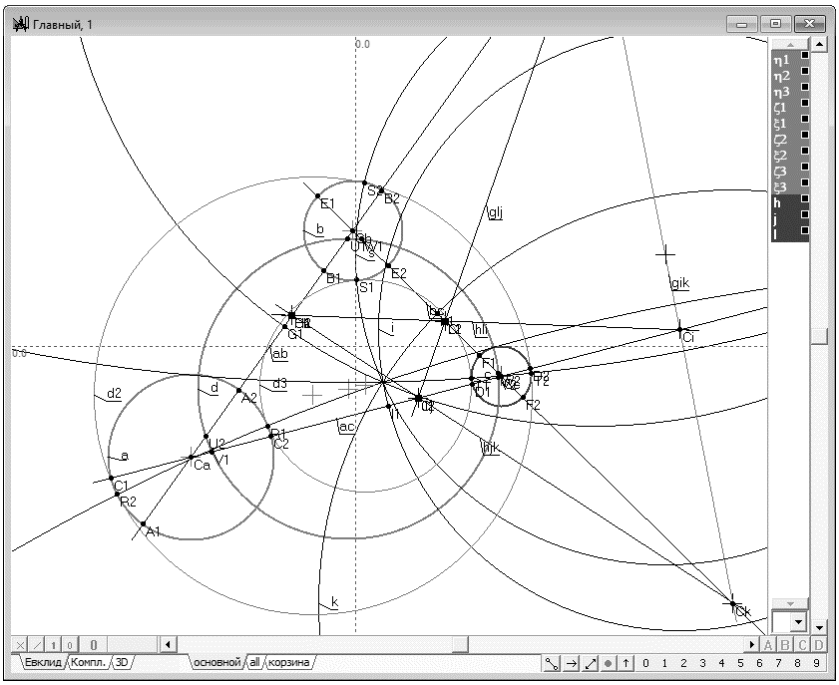

Рис. 5. Геометрическая модель, вскрывающая проекционных характер решения задачи Аполлония

Несмотря на логическую правомерность приведенных утверждений, применение алгоритма выявления троек точек, определяющих касательные окружности, сопряжено с выполнением ряда усложненных операций, в особенности в тех случаях, когда в операциях участвуют объекты с комплексными значениями. Рассмотрим преобразование геометрической конструкции задачи, позволяющей свести операцию селекции точек к сравнению всего двух расстояний. Для решения этой задачи сформулируем и докажем вспомогательную лемму.

Лемма: На плоскости даны две окружности a и b. Пусть также центр некоторой окружности c находится на окружности m, переводящей в индуцируемом ею преобразовании инверсии a и b друг в друга. Тогда образы a' и b' окружностей a и b в этом преобразовании имеют одинаковый радиус (рис. 6).

Вначале рассмотрим конструкцию более общего вида: на плоскости имеются две окружности a и b; построим окружности инверсии $m,n=\circledcirc(a,b)$, переводящие окружности a и b друг в друга.

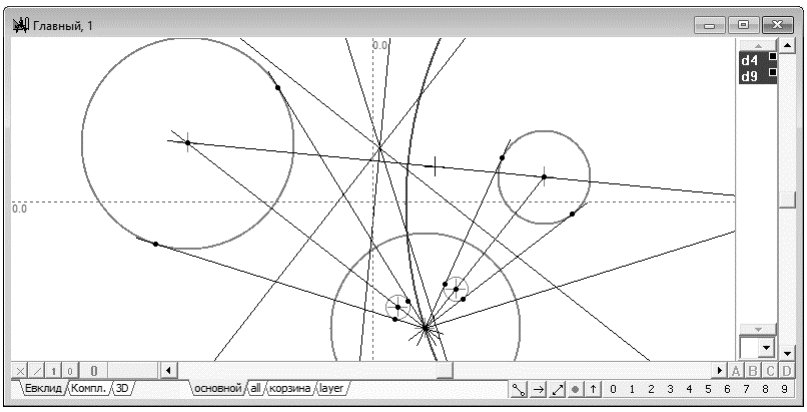

Рис. 6. Принцип получения окружностей равного радиуса в преобразовании инверсии; плоская модель

Выберем на плоскости произвольную окружность inv (рис. 7). Преобразуем в инверсии, индуцированной окружностью inv, окружности a и b, а также производные от них окружности m и n. В результате будут получены образы: $a' = inv_{\circledcirc a}$, $b' = inv_{\circledcirc b}$, $m' = inv_{\circledcirc m}$, $n' = inv_{\circledcirc n}$. Поскольку инверсия является конформным преобразованием, в образах транзитивно сохранится отношение инверсии $a' = m'_{\circledcirc b'}$, $b' = m'_{\circledcirc a'}$, $a' = n'_{\circledcirc b'}$, $b' = n'_{\circledcirc a'}$

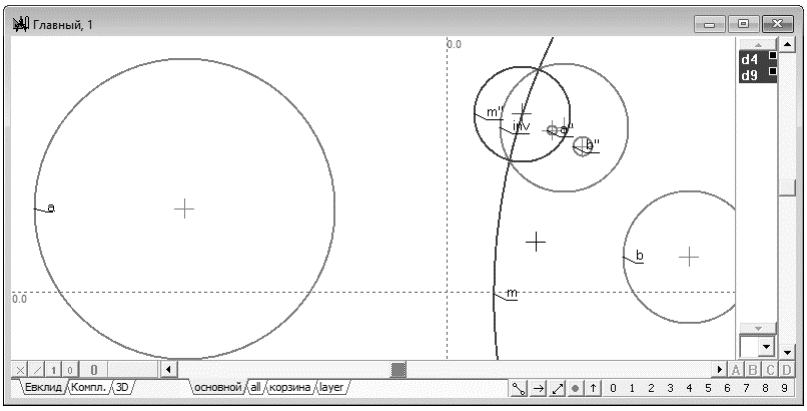

Рис. 7. Геометрическая схема, поясняющая принцип получения образов исходных окружностей относительно произвольной окружности в плоскости

Пусть теперь окружность inv расположится так, что ее центр будет находиться на окружности m. В этом случае окружности a и b также переходят в окружности a', b', а окружность m переходит в прямую m', так как она проходит через центр C окружности inv по условию задачи. Поэтому прямая m' выполняет функции окружности инверсии, переводящей a' в b' и наоборот, но в этом случае она является также и осью симметрии этих окружностей, следовательно, преобразование окружностей a' в b' возможно только в том случае, если радиусы этих окружностей равны (рис. 8). Лемма доказана.

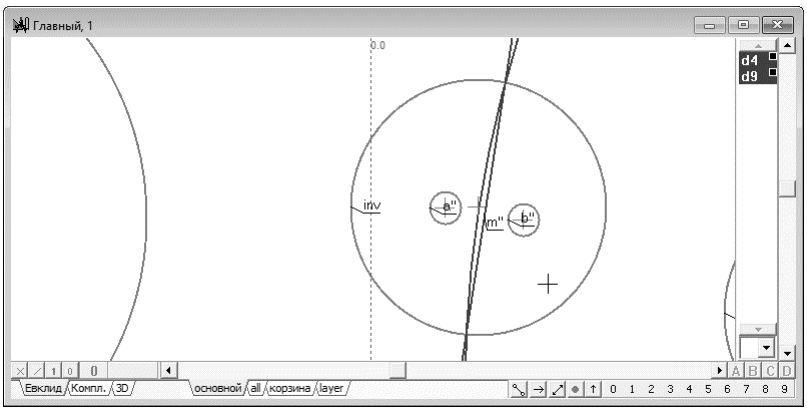

Рис. 8. Геометрическая схема к доказательству равенства радиусов образов окружностей в преобразовании инверсии в соответствии с условиями леммы; плоская модель

Вернемся к задаче Аполлония. Пусть теперь даны три окружности a, b и c (рис. 9). Построим окружности инверсии для пары $a-b$: $ab_1, ab_2 = \circledcirc(a,b)$ и для пары $a-c$: $ac_1, ac_2 = \circledcirc(a,c)$. Найдем точки пересечения, например, окружностей $T_1, T_2 = ab_1 \times ac_1$ (выбор точек и окружностей произволен, так как независимо от него решение задачи будет достигнуто). Проведем окружность t произвольного радиуса с центром в точке T_1. Тогда в соответствии с доказанной леммой исходные окружности a, b и c будут преобразованы в преобразовании инверсии, индуцированной окружностью t, в окружности-образы a', b', c' одинакового радиуса, который обозначим через r. Переведенная в образы, задача Аполлония может быть решена относительно проще, так как построение касательных окружностей к трем окружностям одинакового радиуса, тривиально. Проведем окружность j, ортогональную окружностям a', b', c'. Поскольку ось подобия, образованная точками пересечения «внешних» касательных к окружностям a', b', c' – суть бесконечно удаленная прямая, то окружности, проводимые ортогонально к оси подобия, к окружности, ортогональной сопрягаемой, и каждой окружности из тройки сопрягаемых окружностей, вырождаются в прямые линии, проходящие через центры сопрягаемых окружностей и центр ортогональной окружности. Найдем центры $Ca'_{\odot a'}$, $Cb'_{\odot b'}$, $Cc'_{\odot c'}$, $O_{\odot j}$ окружностей и через полученные точки проведем прямые линии $oa' = Ca' \circ O$, $ob' = Cb' \circ O$, $oc' = Cc' \circ O$. Отметим равенство расстояний $|Ca' \circ O| = |Cb' \circ O| = |Cc' \circ O| = R$. Найдем точки пересечения прямых с окружностями-образами: $A_1, A_2 = oa' \times a'$, $B_1, B_2 = ob' \times b'$, $C_1, C_2 = oc' \times c'$. Пары точек $(A_1 - A_2)$; $(B_1 - B_2)$ и $(C_1 - C_2)$ разграничены

ортогональной окружностью j, при этом каждая точка пары, находясь на прямой, проходящей через центр O, удалена на расстояние радиуса окружности r. Это обстоятельство позволяет распределить точки по критерию удаления точек от точки O на расстояния вида $R \pm r$. После выбора троек точек (например, A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2) остается лишь провести через них пару окружностей $e'_1 = A_1 \circ B_1 \circ C_1$ и $e'_2 = A_2 \circ B_2 \circ C_2$ и выполнить операцию инверсии над этими окружностями относительно окружности t, чтобы получить окружности сопряжения $e_1 = t_{\odot e'_1}$ и $e_2 = t_{\odot e'_2}$ по данным исходной задачи (рис. 9).

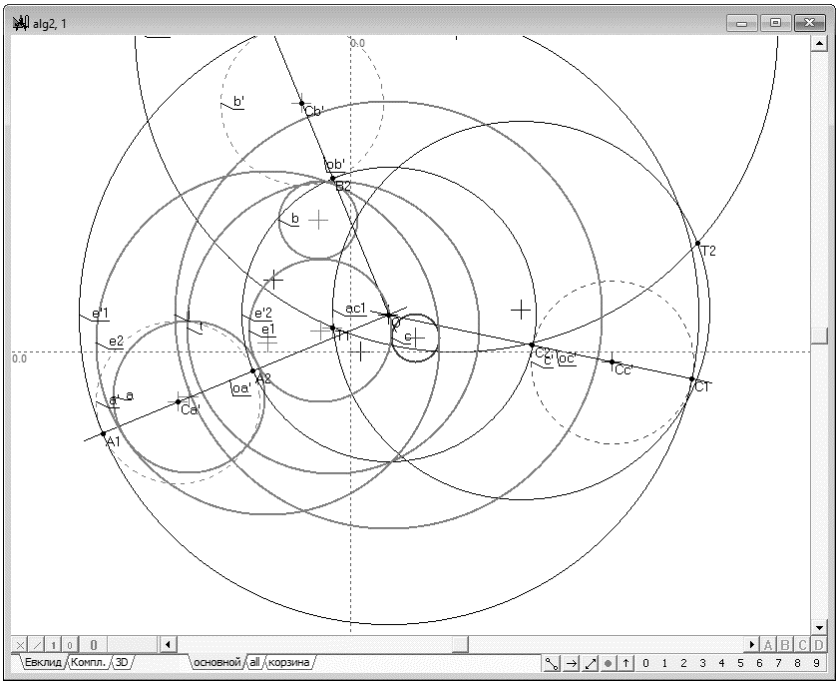

Рис. 9. Геометрическая схема, поясняющая способ нахождения окружности инверсии, преобразующей три произвольные окружности в окружности равного радиуса

Представленный алгоритм не претерпевает принципиальных изменений в тех случаях, когда для нахождения остальных решений задачи во взаимодействие вступают незадействованные в приведенном примере окружности инверсии (возможно, мнимые), порожденные от пар исходных окружностей. Так или иначе, задача будет сведена к построению трех (возможно, мнимых) окружностей равного радиуса, что позволит разграничить точки в образах сопряжений и, получив промежуточное решение, преобразовать его к естественному виду исходной задачи.

Таким образом, задачу Аполлония можно считать полностью решенной. Достоинство представленного метода заключается в том, что решение этой задачи

не зависит от расположения исходных окружностей и всегда исполняется по одному и тому же алгоритму. Более того, алгоритм инвариантен к виду исходных данных, он оказывается пригодным для решения задачи и в том случае, если исходные окружности не являются вещественными, то есть они могут обладать мнимыми радиусами и центрами в любых комбинациях.

5. Решение многомерных аналогов задачи Аполлония

Алгоритм общего решения задачи Аполлония на плоскости может быть легко переложен и на случаи многомерных аналогов этой задачи. В общем виде задача Аполлония для размерности пространства n может быть сформулирована в следующем виде: пусть в пространстве R^n заданы $n+1$ гиперсфер этого пространства. Построить в этом пространстве пару гиперсфер, касательных ко всем исходно заданным гиперсферам. Понятно, что в пространстве n измерений обнаруживается 2^{n+1} гиперсфер касания.

При естественном увеличении количества геометро-графических операций, аналог задачи Аполлония решается единообразно. Мета-алгоритм ее решения состоит в следующем:

1. Из состава исходных гиперсфер $\{a,b,c...\}$ выбирается одна из гиперсфер, например, a, которая будет использована для формирования пар гиперсфер из числа оставшихся исходных: $(a-b)$, $(a-c)$, ….
2. Для каждой сформированной пары строится пара гиперсфер инверсии $ab_1, ab_2 = \circledcirc(a,b)$, $ac_1, ac_2 = \circledcirc(a,c),\ldots$, переводящих в индуцируемых ими преобразованиями инверсии исходные гиперсферы друг в друга.
3. Находятся две точки T_1, T_2 пересечения выбранных гиперсфер инверсии (находятся как результат пересечения исходной сферы с радикальной прямой, образованной от взаимодействия гиперсфер инверсии).
4. В центром в любой из полученных точек строится дополнительная гиперсфера t.
5. Исходные гиперсферы $\{a,b,c...\}$ переводятся в инверсии в образы $\{a',b',c'...\}$ относительно гиперсферы t. Все гиперсферы множества $\{a',b',c'...\}$ обладают одинаковым радиусом.
6. Проводится гиперсфера j, ортогональная к гиперсферам $\{a',b',c'...\}$.

7. Центр O гиперсферы j соединяется прямыми линиями с центрами $\{Ca', Cb', Cc', ...\}$ гиперсфер $\{a', b', c' ...\}$ и находятся два множества точек касания гиперсфер вида $e'_1 = A_1 \circ B_1 \circ C_1 \circ ...$ и $e'_2 = A_2 \circ B_2 \circ C_2 \circ ...$ в образах.
8. Окончательное решение задачи получается отображением гиперсфер e'_1 и e'_2 в инверсии относительно гиперсферы t: $e_1 = t_{\circledcirc e'_1}$ и $e_2 = t_{\circledcirc e'_2}$.

Приведем в качестве примера решение аналога задачи Аполлония для трехмерного пространства. В качестве системы моделирования трехмерного пространства будем использовать однородную модель трехмерного пространства в двух плоских полях $G^3_{2,2}$ в ее частном проявлении (эпюр Монжа) [4, 10].

Итак, в полях плоской проекционной модели заданы реперы четырех сфер. Под символами a, b, c и d будем понимать группы, составленные из соответственных очерков-окружностей, моделирующих сферу в трехмерном пространстве (рис. 10). В соответствии с первым пунктом общего алгоритма требуется расставить сферы в пары $a-b$, $a-c$ и $a-d$.

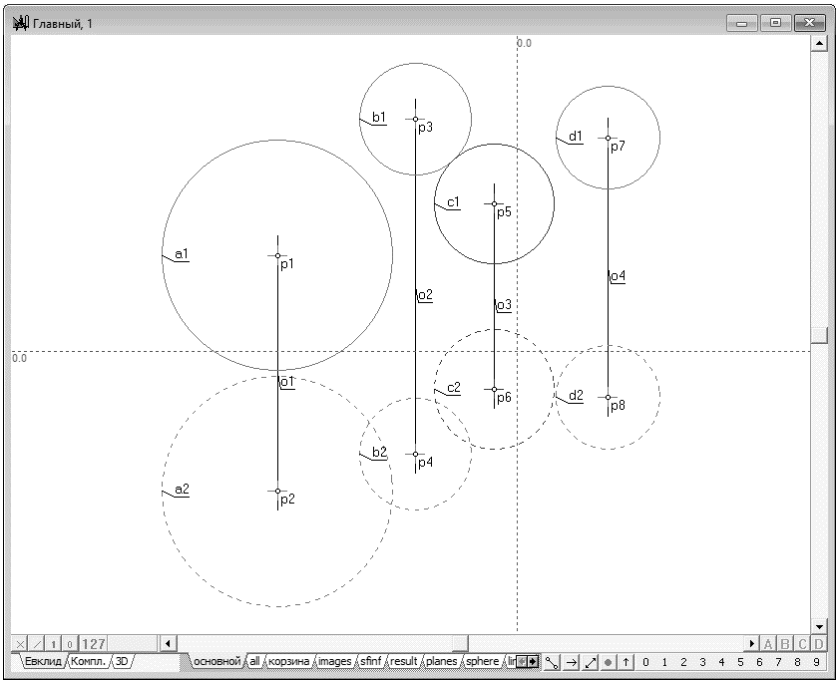

Рис. 10. Исходные данные к задаче о построении сфер, касательных к четырем заданным сферам, представленные на модели $G^3_{2,2}$.

5.1. Алгоритм построения сфер инверсий двух сфер (alg1)

Для реализации второго пункта алгоритма требуется разработать функцию, позволяющую по данным проекционных изображений реперов сфер построить две сферы инверсии, преобразующие исходные сферы друг в друга. Данная функция будет представлена отдельным алгоритмом, который, как и все следующие алгоритмы, может быть применен в качестве процедуры многократно к различным исходным данным.

Предположим, что две сферы $a(a_1, a_2)$ и $b(b_1, b_2)$ являются входными формальными параметрами процедуры поиска сфер инверсий. Найдем центры окружностей $Ca_{1\odot a_1} - Ca_{2\odot a_2}$ и $Cb_{1\odot b_1} - Cb_{2\odot b_2}$, моделирующие точки центров исходных сфер. Прямые $t_1 = Cb_1 \circ Ca_1$, $t_2 = Cb_2 \circ Ca_2$ моделируют прямую линию t, соединяющую центры сфер. Выполним преобразование плоскостей проекций, переводящее проекции прямой линии в такое положение, в котором линия t видна, как линия уровня, а одна из проекций, соответственно, изображена в натуральную величину. Для выполнения такого преобразования необходимо произвольно разместить в поле чертежа горизонтальную прямую h , играющую роль оси исходной проекционной системы, а ось n замещающей проекционной системы провести параллельно одной из проекций линии t, например, $n \| t_2$. Тогда натуральная величина прямой t будет изображаться прямой t_3.

Зададим инволюции второго и третьего рода на прямой t_3 и точках A_1, A_2, B_1, B_2 пересечения этой прямой с окружностями a_3 и b_3: $\eta_1 \left| \begin{matrix} t_3; A_1; A_2 \\ t_3; B_1; B_2 \end{matrix} \right.$, $\eta_2 \left| \begin{matrix} t_3; A_1; B_1 \\ t_3; B_2; A_2 \end{matrix} \right.$. Двойные точки U_1, U_2 V_1, V_2 инволюций η_1 и η_2, соответственно взятые, как диаметральные, позволяют построить очерки искомых сфер инверсии ab_{13} и ab_{23} в третьем дополнительном поле. Зная позиции центров окружностей, найдем положение первых и вторых проекций этих точек, и построим на них, как на центрах, очерковые образующие соответственных искомых сфер $ab_{11} - ab_{12}$ и $ab_{21} - ab_{22}$, которые являются выходными параметрами сформированного алгоритма alg1 (рис. 11).

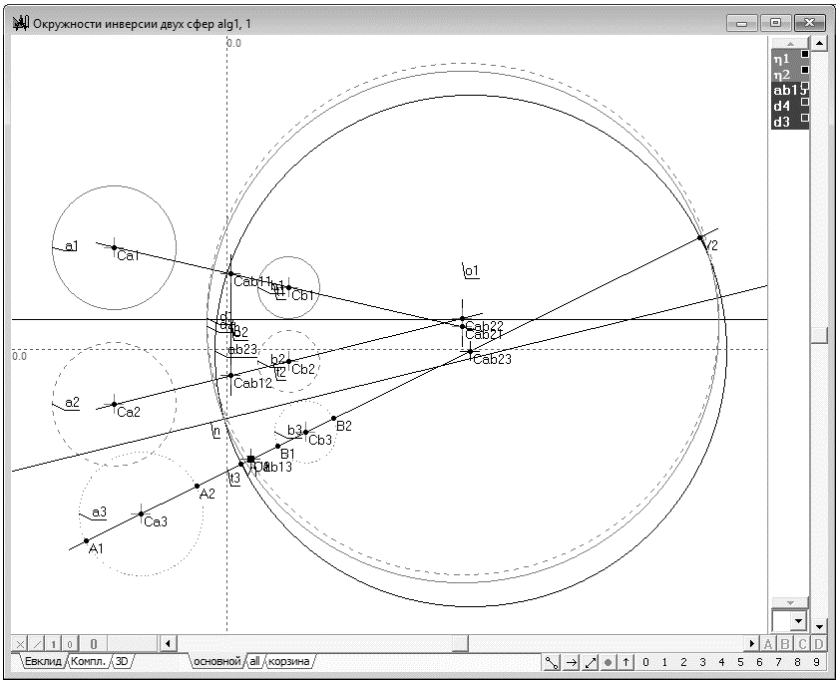

Рис. 11. Схема геометрической машины, предназначенной для построения сфер инверсии для двух произвольных сфер на модели $G^3_{2,2}$

5.2. Алгоритм построения радикальной плоскости двух сфер (alg2)

Третий пункт решения многомерного аналога задачи Аполлония подразделяется на несколько подзадач.

Для построения радикальной плоскости двух сфер повторим все действия предыдущего алгоритма вплоть до образования линии t_3. Поскольку эта линия изображается в третьем поле в натуральную величину, то в этом поле радикальная плоскость, перпендикулярная в пространстве к линии t, предстанет в качестве вырожденной проекции, совпадающей с радикальной осью окружностей-очерков в дополнительном поле проекций. Построив радикальную ось rx, определим в дополнительном поле точку S ее пересечения с линией t и восстановим положение проекций S_1, S_2 в исходных полях. Остается провести через S_1, S_2 проекции двух линий уровня g и h: $g_1 : g_1 \perp t_1$, $g_1 \sim S_1$; $g_2 : g_2 \sim S_2, \measuredangle(S_2, ox) = 0$; $f_1 : f_1 \sim S_1, \measuredangle(S_1, ox) = 0$; $f_2 : f_2 \perp t_2, f_2 \sim S_2$, которые представляют собой формальные выходные параметры алгоритма alg2 (рис. 12).

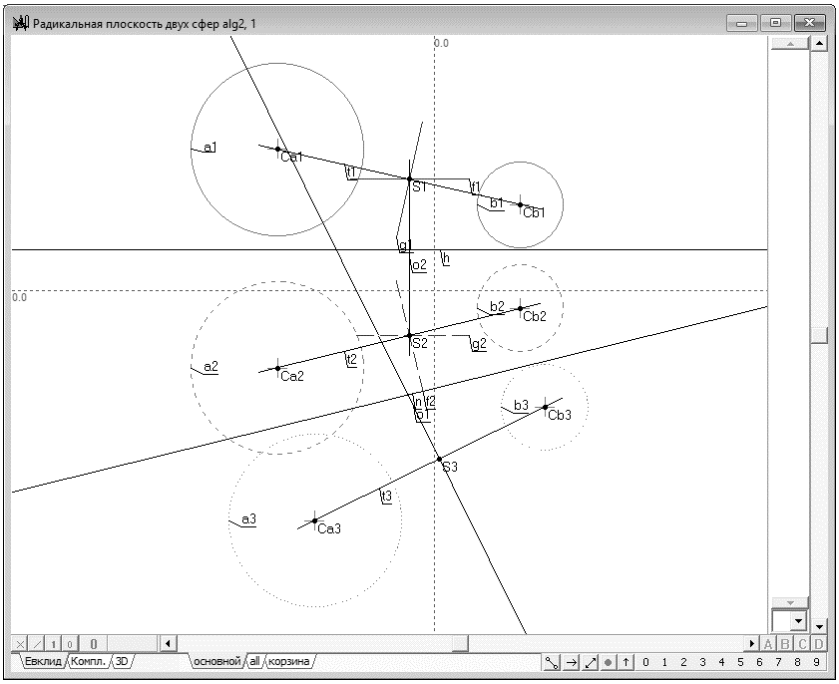

Рис. 12. Схема геометрической машины, предназначенной для построения радикальной плоскости двух произвольных сфер на модели $G^3_{2,2}$

5.3. Алгоритм построения линии пересечения двух плоскостей (alg3)

Пусть даны две плоскости, представленные двумя пересекающимися прямыми линиями: $\alpha(a,b)$ и $\beta(c,d)$. Представим на модели $G^3_{2,2}$ прямые линии проекциями: $a(a_1,a_2)$, $b(b_1,b_2)$, $c(c_1,c_2)$, $d(d_1,d_2)$, которые составляют набор входных параметров алгоритма. Пресечем плоскости α и β проецирующей плоскостью γ, перпендикулярной первому полю проекций. След плоскости γ_1 пересечется с первыми проекциями прямых, составляющих репер плоскостей α и β: $A_1 = a_1 \times \gamma_1$, $B_1 = b_1 \times \gamma_1$, $C_1 = c_1 \times \gamma_1$, $D_1 = d_1 \times \gamma_1$. Найдем вторые проекции точек линий пересечения $l = \alpha \times \gamma$ и $m = \beta \times \gamma$: $A_2 = a_2 \times eA$, $B_2 = b_2 \times eB$, $C_2 = c_2 \times eC$, $D_2 = d_2 \times eD$, $l_2 = B_2 \circ A_2$, $m_2 = D_2 \circ C_2$. Поскольку $S = \alpha \times \beta \times \gamma$, вторая ее проекция может быть найдена, как $S_2 = l_2 \times m_2$, а первая проекция инцидентна следу плоскости $S_1 \sim \gamma_1$ и находится в проекционной связи с S_2. Для построения линии пересечения плоскостей α и β требуется построение еще одной точки T такой, чтобы соблюдалось условие $T \neq S$. Выявим и продублируем конструктивную связь, установленную между объектами $\gamma_1 \to S_1$, генерируя при этом новые имена объектов дублируемой части алгоритма и осуществляя подмену аналога объекта γ_1 на след δ_1 новой проецирующей плоскости δ. В результате получим вторую точку

$T(T_1, T_2)$, необходимую для построения линии пересечения $\nu_1 = T_1 \circ S_1$, $\nu_2 = T_2 \circ S_2$ плоскостей α и β. Проекции ν_1, ν_2 – формальные выходные параметры алгоритма alg3 (рис. 13).

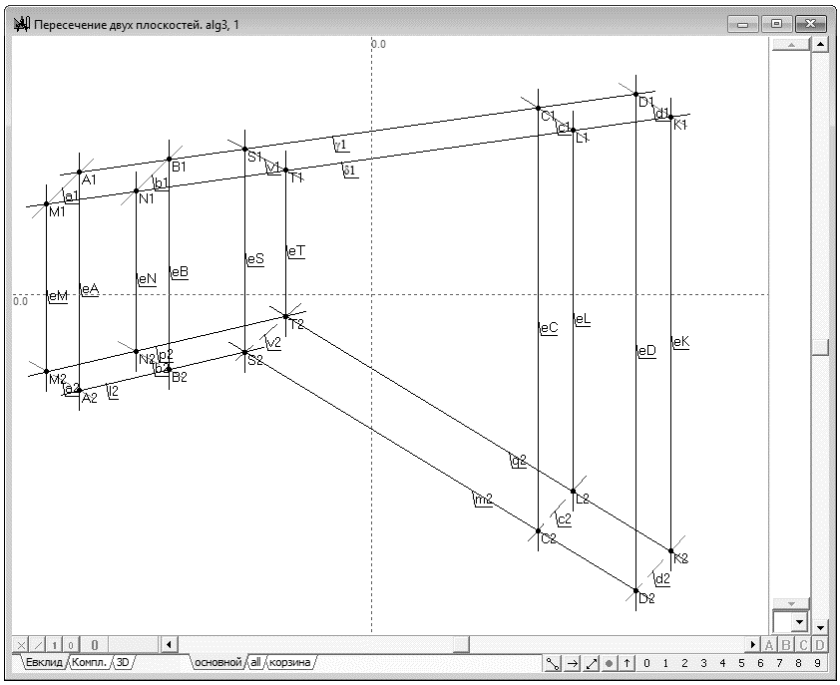

Рис. 13. Схема геометрической машина, предназначенной для построения линии пересечения двух плоскостей на модели $G^3_{2,2}$

5.4. Алгоритм построения точки пересечения сферы и прямой линии (alg4)

Зададим сферу $a(a_1, a_2)$ очерковыми образующими, а прямую линию $l(l_1, l_2)$. Объекты a_1, a_2, l_1, l_2 – формальные входные параметры алгоритма. Задача нахождения точек пересечения прямой и сферы решается построением дополнительного поля проекций, в котором прямая l будет изображена проекцией l_3 в натуральную величину. В этом случае проекцию l_2 можно считать следом некоторой плоскости δ, ортогональной ко второму полю проекций и параллельной третьему полю. В этом случае окружность d_3 – суть проекция линии пересечения плоскости δ и сферы a, причем $l \sim a$. Тогда точки P_3, Q_3 – точки пересечения прямой линии со сферой, изображенные в дополнительном поле. Восстановление проекций точек P и Q в исходных полях: P_1, P_2, Q_1, Q_2 – позволяет сформировать формальные выходные параметры алгоритма alg4, предназначенного для нахождения точек пересечения прямой линии со сферой (рис. 14). Этим действием завершается третий этап решения задачи.

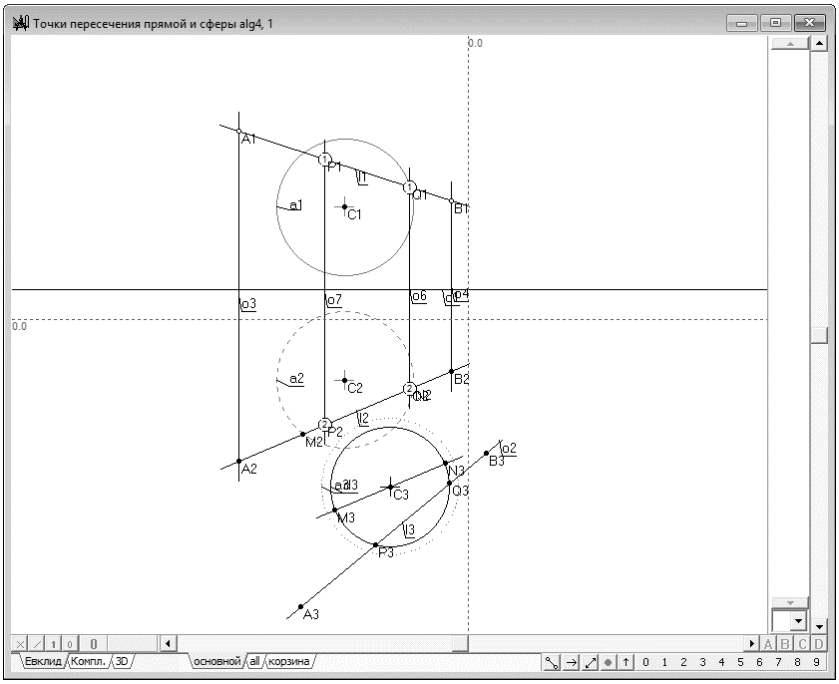

Рис. 14. Схема геометрической машины, предназначенной для построения точек пересечения прямой линии со сферой на модели $G^3_{2,2}$

5.5. Алгоритм построения сферы, проходящей через четыре точки (alg5)

Реализуем четвертый пункт решения общей задачи. Пусть в трехмерном пространстве заданы четыре точки $A(A_1, A_2)$, $B(B_1, B_2)$, $C(C_1, C_2)$ и $D(D_1, D_2)$. Алгоритм решения задачи сводится к построению трех плоскостей $plb(fab_1, fab_2, gab_1, gab_2)$, $plc(fac_1, fac_2, gac_1, gac_2)$, $pld(fad_1, fad_2, gad_1, gad_2)$, ортогональных к трем отрезкам $ab_1 = B_1 \circ A_1$, $ab_2 = B_2 \circ A_2$ $ac_1 = C_1 \circ A_1$, $ac_2 = C_2 \circ A_2$, $ad_1 = D_1 \circ A_1$, $ad_2 = D_2 \circ A_2$, исходящих, например, из точки A в B, C, D через серединные точки $E(E_1, E_2)$, $F(F_1, F_2)$, $G(G_1, G_2)$ этих отрезков, с последующим нахождением точки $P_1 = v_1 \times v_3$, $P_2 = v_4 \times v_2$ пересечения этих плоскостей. Расстояние $l = |A_3, P_3|$ от полученной точки до любой из исходных есть радиус искомой сферы, которым с центром в точке $P(P_1, P_2)$ следует провести очерки s_1, s_2 сферы, которые являются формальными выходными параметрами алгоритма alg5 (рис. 15).

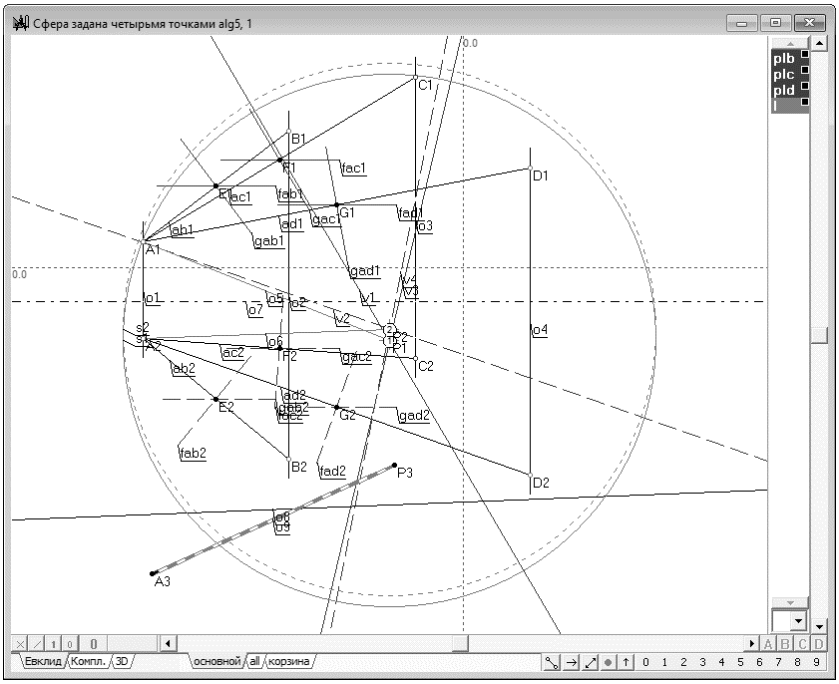

Рис. 15. Схема геометрической машины, осуществляющей построение сферы по четырем точкам; модель $G^3_{2,2}$

5.6. Алгоритм построения точки в инверсии относительно сферы (alg6)

Пятый пункт решения задачи требует выполнения подготовительной операции. Пусть в трехмерном пространстве даны сфера a и точка P. Требуется определить образ Q точки P в преобразовании инверсии, индуцируемой сферой a. На модели формальные входные параметры представлены следующими объектами: сфера $a(a_1, a_2)$ и точка $P(P_1, P_2)$. Построим новую систему плоскостей проекций для отображения линии $T(t_1, t_2)$, проведенной через центр сферы Ca и точку P: $t_1 = Ca_1 \circ P_1$, $t_2 = P_2 \circ Ca_2$ в виде линии уровня, для чего выберем ось плоскостей проекции этой системы, параллельной второй проекции линии t: $x_{23} \parallel t_2$. В третьем поле искомое преобразование может быть выполнено относительно окружности a_3, представляющей очерк сферы a, в результате чего будет получена третья проекция точки-образа Q_3. Восстановим положение проекций $Q_2 = Q_{3t_2}$ и $Q_1 = e_Q \times t_1$, в результате чего получаем решение задачи в исходной постановке и формируем формальные выходные параметры Q_1 и Q_2 алгоритма alg6 (рис. 16).

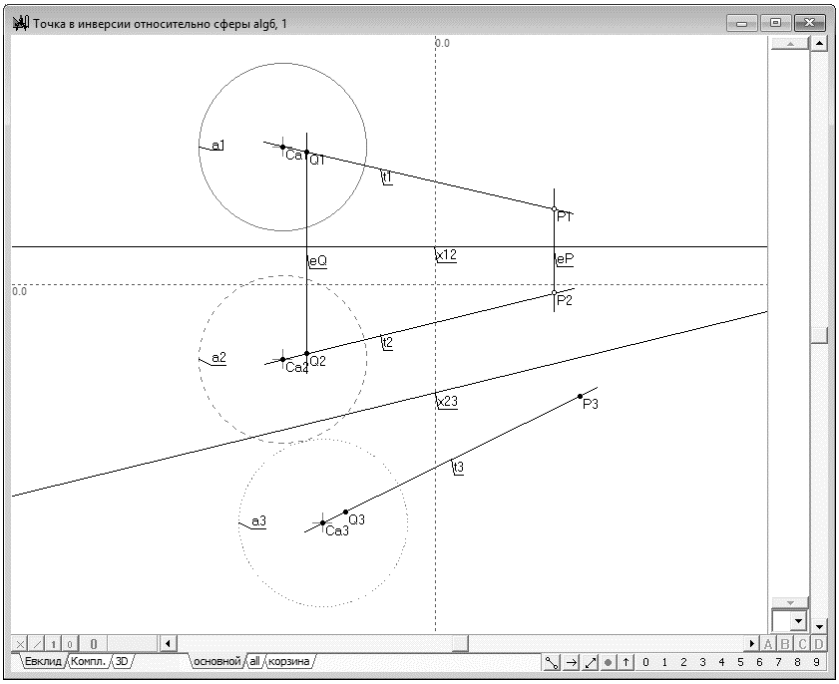

Рис. 16. Схема геометрической машины, осуществляющей преобразование точки в инверсии относительно сферы; модель $G^3_{2,2}$

5.7. Алгоритм построения образа сферы в инверсии относительно сферы (alg7)

В трехмерном пространстве дана сфера a и сфера инверсии inv. Выберем на поверхности сферы a четыре произвольные несовпадающие точки, например, $A(A_1, A_2)$, $B(B_1, B_2)$, $C(C_1, C_2)$ и $D(D_1, D_2)$. Выполним преобразование каждой точки в инверсии относительно сферы $inv(inv_1, inv_2)$, обращаясь к алгоритму alg6, как к процедуре. В результате будут получены $A'(A'_1, A'_2)$, $B'(B'_1, B'_2)$, $C'(C'_1, C'_2)$ и $D'(D'_1, D'_2)$, через которые обращаясь к алгоритму построения сферы по четырем точкам, как к процедуре, проведем сферу $s(s_1, s_2)$, которая является формальным выходным параметром алгоритма alg7 (рис. 17). На этом пятый этап завершен.

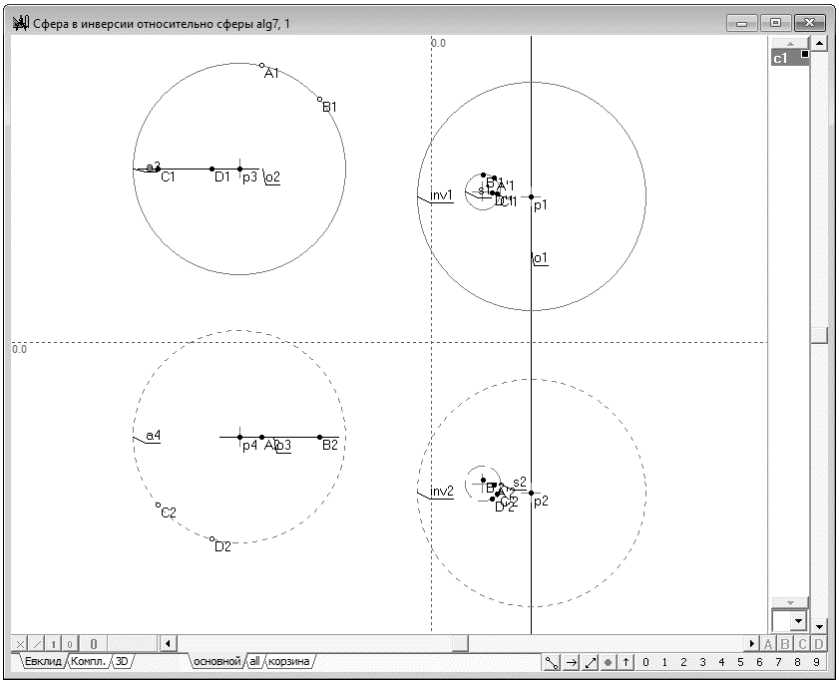

Рис. 17. Схема геометрической машины, осуществляющей преобразование сферической поверхности в инверсии относительно сферы; модель $G^3_{2,2}$

5.8. Алгоритм построения ортогональной сферы (alg8)

Шестой этап. По аналогии с решением задачи Аполлония, сфера, ортогональная к четырем заданным сферам, проходит через двойные точки инволюций первого рода, индуцированные сторонами тетраэдра, соединяющего центры исходных сфер, и точками пересечения его сторон с соответственными сферами. Поэтому для определения ортогональной сферы достаточно выбрать четыре двойные точки этих инволюций, не лежащие в одной плоскости, и провести через них сферу. Для выполнения этих действий проекции трех сторон тетраэдра, не лежащих в одной плоскости, следует привести в новых системах плоскостей проекций к такому расположению, при котором они будут изображены линиями уровня. Обозначив через $A_1 - A_2$, $B_1 - B_2$, $C_1 - C_2$ и $D_1 - D_2$ проекции центров соответственных сфер $a(a_1, a_2)$, $b(b_1, b_2)$, $c(c_1, c_2)$, $d(d_1, d_2)$, являющиеся формальными входными параметрами алгоритма, построим проекции линий, соединяющие центры сфер: $ab_1 = B_1 \circ A_1$, $ab_2 = B_2 \circ A_2$, $ac_1 = C_1 \circ A_1$, $ac_2 = C_2 \circ A_2$, $ad_1 = D_1 \circ A_1$, $ad_2 = D_2 \circ A_2$ и, задав новые оси систем проекций таким образом, чтобы они был параллельны вторым проекциям прямых $x_{23} \parallel ab_2$, $x_{24} \parallel ac_2$, $x_{25} \parallel ad_2$, построим соответственные дополнительные проекции ab_3, ac_4 и ad_5, которые будут изображать пространственные прямые ab, ac и ad в натуральную

величину. Это действие позволяет непосредственно определить необходимые инволюции в дополнительных полях: $\eta_1 \left| \begin{matrix} ab_3; A_{31}; B_{32} \\ ab_3; A_{32}; B_{31} \end{matrix} \right.$, $\eta_2 \left| \begin{matrix} ac_4; A_{41}; C_{42} \\ ac_4; A_{42}; C_{41} \end{matrix} \right.$, $\eta_3 \left| \begin{matrix} ad_5; A_{51}; D_{52} \\ ad_5; A_{52}; D_{51} \end{matrix} \right.$, где $A_{32}, A_{31} = ab_3 \times a_3$, $B_{32}, B_{31} = ab_3 \times b_3$, $A_{42}, A_{41} = ac_4 \times a_4$, $C_{42}, C_{41} = ac_4 \times c_4$, $A_{52}, A_{51} = ad_5 \times a_5$, $D_{52}, D_{51} = ad_5 \times d_5$. Используя полученные данные, построим двойные точки инволюций $E_3, F_3 = \overset{2}{\eta_1}$, $G_4, H_4 = \overset{2}{\eta_2}$, и $I_5, J_5 = \overset{2}{\eta_3}$. Восстановив проекции точек $E(E_1, E_2)$, $F(F_1, F_2)$, $G(G_1, G_2)$, $H(H_1, H_2)$, $I(I_1, I_2)$, $J(J_1, J_2)$ в исходных полях, выберем из них любые четыре пары проекций, например, E, F, H, J, которые в совокупности не моделируют единую плоскость, и, используя их в качестве фактических входных параметров алгоритма alg5, построим проекции очерков ортогональной сферы $s(s_1, s_2)$, являющиеся формальными выходными параметрами алгоритма alg8 (рис. 18).

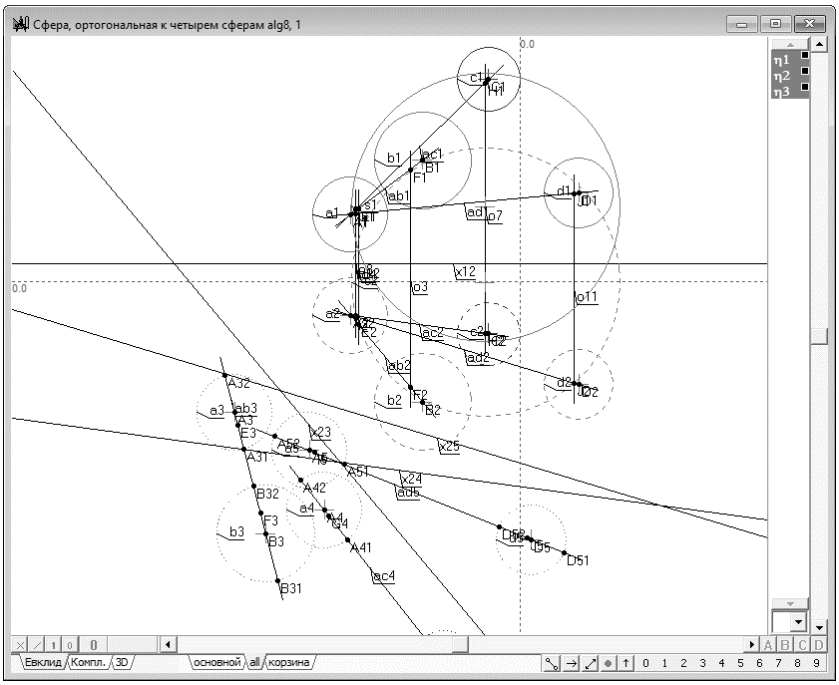

Рис. 18. Схема геометрической машины, осуществляющей построение сферы, ортогональной к четырем заданным сферам; модель $G^3_{2,2}$

5.9. Завершение решения задачи

Итак, все подготовительные этапы завершены. Вернемся к основному алгоритму, в котором заданы четыре сферы $a(a_1, a_2)$, $b(b_1, b_2)$, $c(c_1, c_2)$, $d(d_1, d_2)$. Объединяя сферы в пары, трижды обращаемся к алгоритму alg1, назначая в

качестве фактических входных параметров сферы каждой пары. Алгоритм возвращает три пары сфер инверсий $inv1$, $inv2$, $inv3$ (рис. 19).

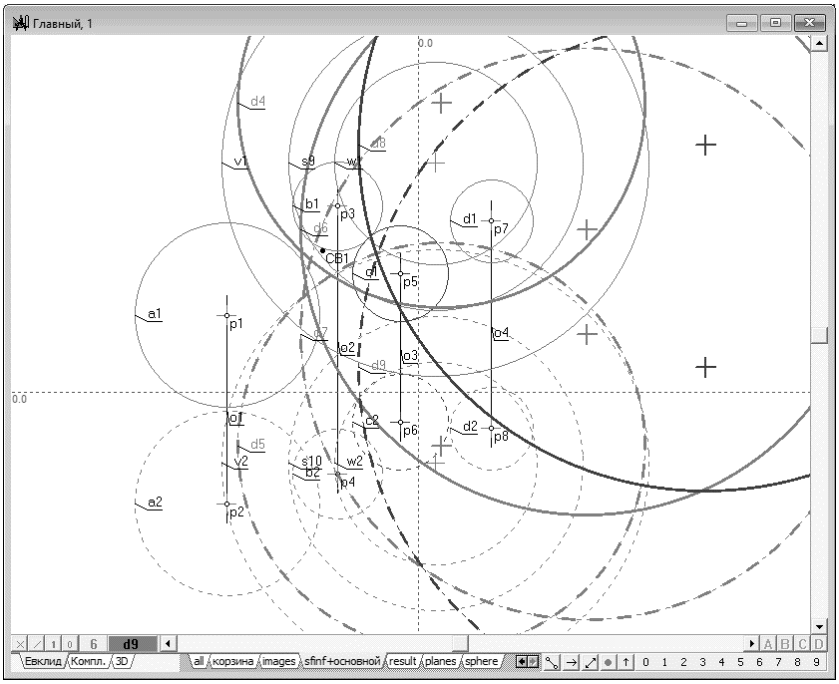

Рис. 19. Результат поиска сфер, задающих инверсии в парах сфер $(a-b)$, $(a-c)$ и $(a-d)$; модель $G^3_{2,2}$

Найдем две радикальные плоскости $pl1$, $pl2$, возникающие между сферами $inv1-inv2$, $inv1-inv3$ (алгоритм alg2) и построим линию пересечения этих плоскостей $line1$ (алгоритм alg3) (рис. 20).

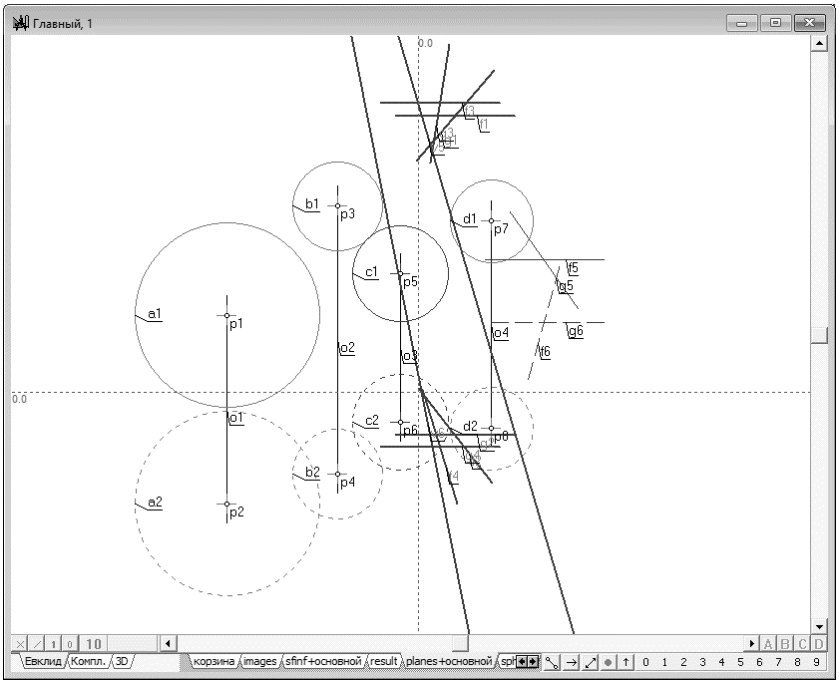

Рис. 20. Результат построения линии пересечения радикальных плоскостей трех пар сфер; модель $G^3_{2,2}$

Пересекаясь с выбранными сферами инверсии $inv1$ ($inv2$, $inv3$), прямая $line1$ порождает в пересечении с ними пару точек $point1$, $point2$ (алгоритм alg4) (рис. 21).

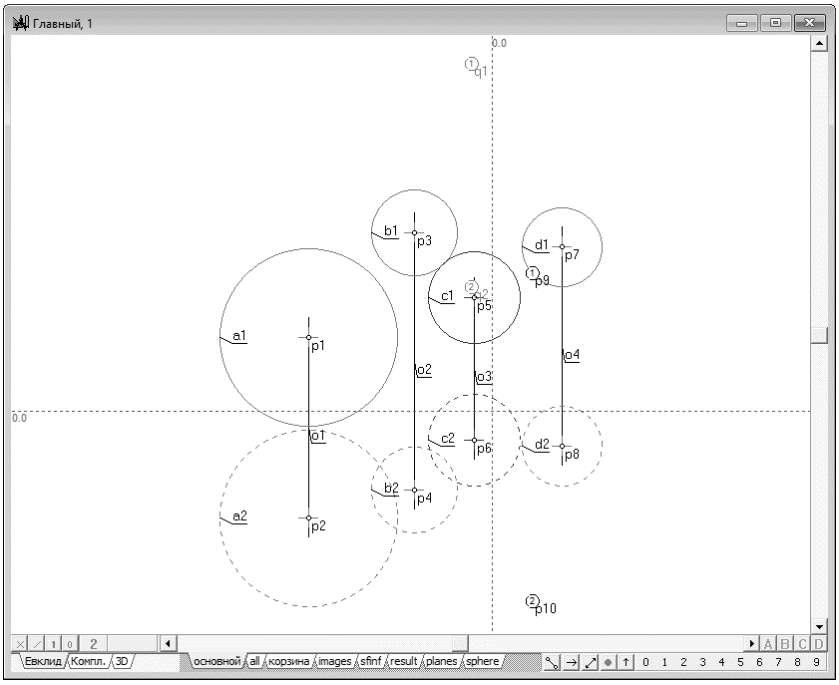

Рис. 21. Результат нахождения точек пересечения трех инверсионных сфер; модель $G^3_{2,2}$

Выбирая любую из них, например $point1$, строим сферу inv произвольного радиуса (рис. 22).

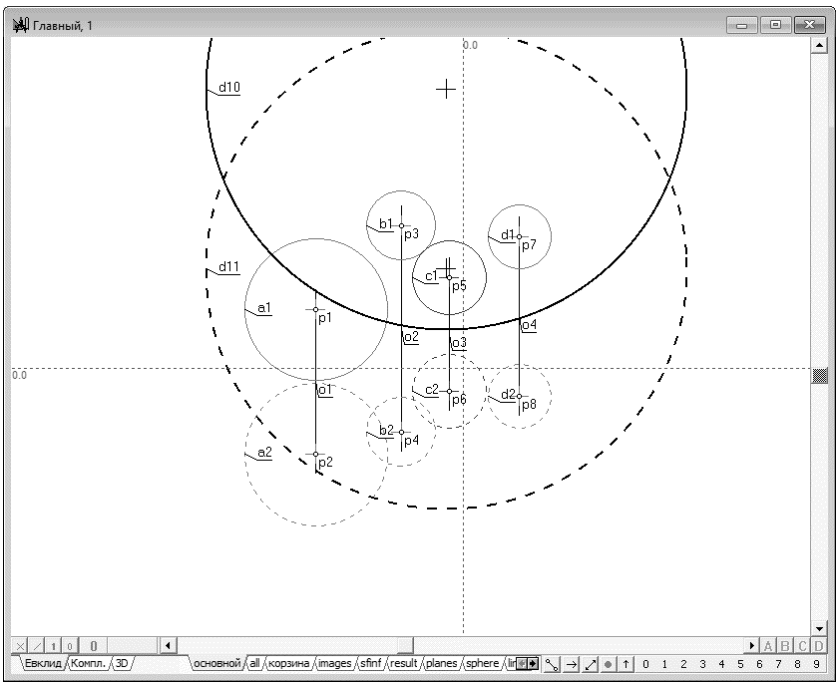

Рис. 22. Построение сферы произвольного радиуса в одной из точек пересечения трех инверсионных сфер; модель $G^3_{2,2}$

Преобразуем исходные сферы $a(a_1,a_2)$, $b(b_1,b_2)$, $c(c_1,c_2)$, $d(d_1,d_2)$ в инверсии (алгоритмы alg5, alg6, alg7), индуцированной сферой inv, в результате получим соответственные сферы-образы inv_a, inv_b, inv_c, inv_d, отличительной особенность которых будет равенство радиусов всех четырех сфер (рис. 23). Воспользовавшись алгоритмом alg8, проведем сферу ort, ортогональную к сферам inv_a, inv_b, inv_c, inv_d.

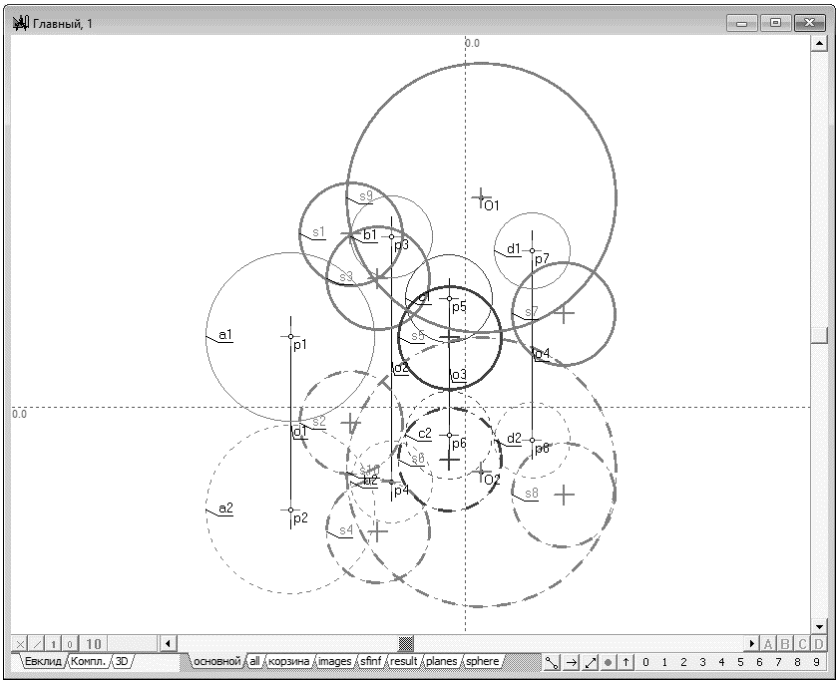

Рис. 23. Результат преобразования исходных сфер в сферы одинакового радиуса в преобразовании инверсии; модель $G_{2,2}^3$

Из центра сферы ort в центры сфер inv_a, inv_b, inv_c, inv_d проведем прямые линии и найдем точки пересечения этих прямых со сферами, через центры которых они проходят. В результате будут построены восемь точек, которые необходимо распределить в две четверки по признаку равенства расстояния всех точек групп до центра сферы ort (рис. 24).

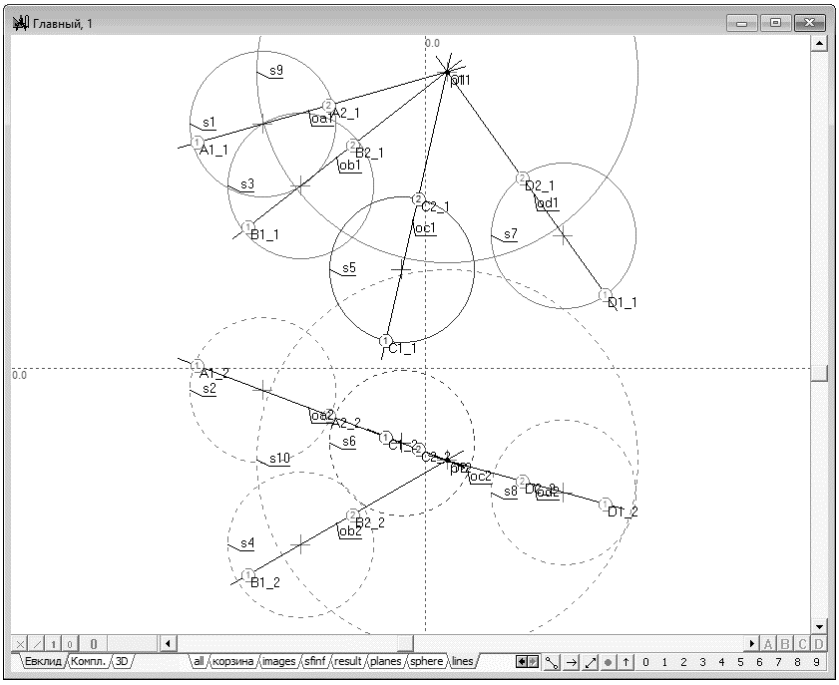

Рис. 24. Поиск точек касания двух не пересекающихся по действительным окружностям сфер к сферам одинакового радиуса; модель $G_{2,2}^3$

Распределив точки, проводим через них две концентрические сферы u и v, касательные к сферам inv_a, inv_b, inv_c, inv_d, дважды воспользовавшись алгоритмом alg5, после чего преобразуем сферы в инверсии, индуцированной сферой inv (алгоритм alg7) и получаем результат решения задачи – пару сфер $res1$ и $res2$, касающихся четырех заданных сфер $a(a_1, a_2)$, $b(b_1, b_2)$, $c(c_1, c_2)$, $d(d_1, d_2)$ (рис. 25).

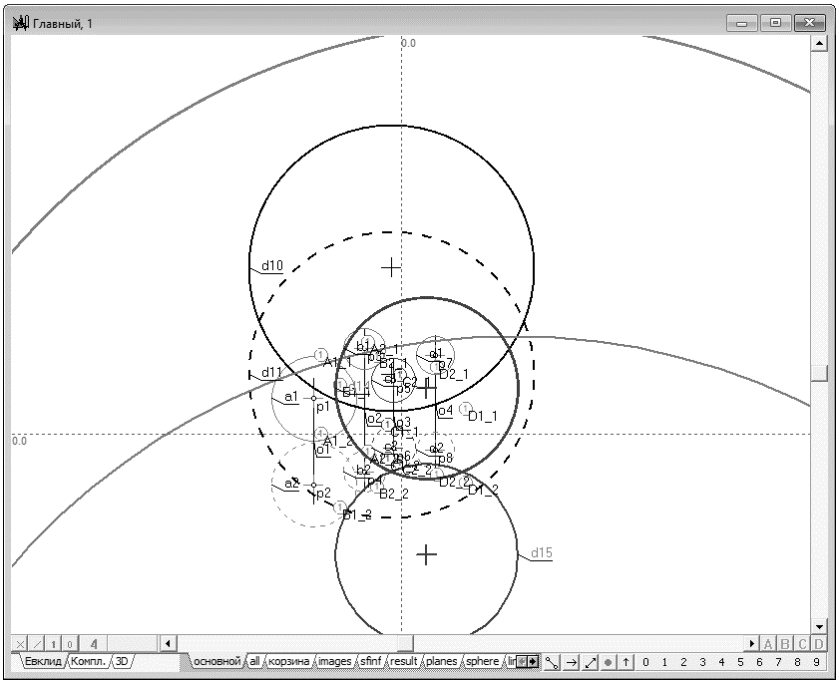

Рис. 25. Окончательный результат решения задачи; модель $G^3_{2,2}$

Таким образом, с помощью визуально-графических средств системы Симплекс разработана конструктивная геометрическая модель и автоматически синтезирована компьютерная программа, позволяющая решать трехмерный аналог задачи Аполлония. Алгоритм лишен известных исключений, поскольку является общим как для действительных, так и для мнимых объектов, участвующих в решении задачи.

В заключение представим сцену, интерпретирующую исходные данные и результат решения задачи, визуализированную средствами системы 3ds Max® фирмы Autodesk® (рис. 27). Изображение получено в результате преобразования внутреннего формата данных системы Симплекс в формат OBJ, воспринимаемый модулем импорта системы 3ds Max®. Следует заметить, что несмотря на бесспорно высокие показатели качества получаемого в 3ds Max® изображения, по нему невозможно полноценно судить о геометрическом существе полученного решения. Изображение не позволяет проверить, действительно ли в результате решения были получены две сферы, касающиеся четырех заданных сфер. Не дает четкий ответ на этот вопрос и анимационное представление сцены, которое несложно получить средствами этой системы (рис. 28). В этом смысле конструктивная геометрическая модель обладает неоспоримым преимуществом, поскольку она позволяет дать качественный ответ на вопросы о позиционных отношениях, возникающих между объектами задачи.

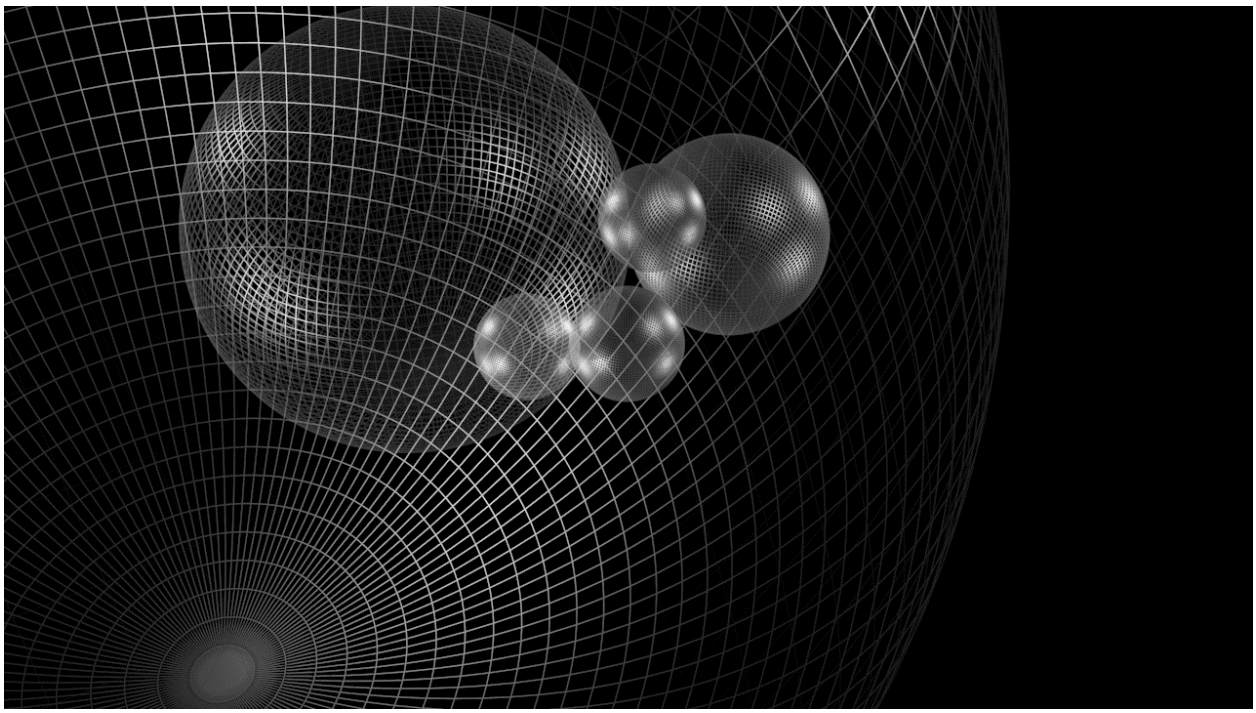

Рис. 26. Окончательный результат решения задачи; проекционное изображение трехмерной модели

6. Заключение

В результате проведенных исследований были получены следующие результаты:

1. Разработана единая конструктивная геометрическая модель, позволяющая решать задачу Аполлония без известных исключений и учитывающая как действительные, так и мнимые значения исходных данных и получаемых результатов.
2. Представлен общий мета-алгоритм, позволяющий синтезировать единые алгоритмы решения аналогов задачи Аполлония в многомерных пространствах.
3. Показана методика визуального синтеза компьютерных программ, основанных на принципах конструктивного геометрического моделирования и позволяющих применять эти модели в прикладных областях, нуждающихся в геометрической интерпретации и визуализации данных, а также управления ими через визуально-графический интерфейс.
4. Продемонстрировано, что визуальные средства синтеза геометрических моделей и получения решений дают возможность наблюдения за динамикой поведения геометрических алгоритмов, что способствует

повышению интереса к исследовательской деятельности в области конструктивной геометрии, позволяет сократить время поиска правильных решений и обнаружения ранее неизвестных свойств.

5. Возможность создания новых инструментов, реализуемых в контексте предложенной парадигмы, способствует не только более быстрому и точному решению известных задач, но и позволяет устранить проблему высокой трудоемкости, сопровождающей геометрические исследования, выполнение которых без использования информационных инструментов попросту невозможно.
6. Исследование геометрических моделей и конструкций приобретает ясно очерченный смысл, поскольку методика визуального проектирования позволяет без каких-либо дополнительных усилий и затрат практически претворять результаты исследований в виде действующих программ и аппаратных устройств, формировать востребованную систему геометрических знаний.

Литература

1. *Адамар Ж.* Элементарная геометрия. Часть I. Планиметрия. М.: Учпедгиз, 1948.— 608 с.
2. *Аргунов Б. И., Балк М. Б.* Геометрические построения на плоскости. М.: Учпедгиз, 1957.— 268 с.
3. *Бакельман И. Я.* Инверсия. М.: Наука, 1966.— 79 с.
4. *Вальков К. И.* Введение в теорию моделирования. Л.: ЛИСИ, 1974.— 152 с.
5. *Волков В. Я., Юрков В. Ю., Панчук К. Л., Кайгородцева Н. В.* Курс начертательной геометрии на основе геометрического моделирования: учебник / В. Я. Волков, В. Ю. Юрков, К. Л. Панчук, Н. В. Кайгородцева. Омск: Изд.-во СибАДИ, 2010.— 253 с.
6. *Волошинов Д. В.* Алгоритм решения задачи Аполлония на основе построения ортогональных окружностей // В сборнике: ГРАФИКОН'2016 Труды 26-й Международной научной конференции. Нижний Новгород, 2016.— С. 284–288.
7. *Волошинов Д. В.* Геометрическая лаборатория. Закладываем основы / Качество графической подготовки: проблемы, традиции и инновации: Материалы VII Международной интернет-конференции КГП-2017. URL: http://dgng.pstu.ru/conf2017/papers/53/
8. *Волошинов Д. В.* Геометрическая лаборатория. Инструменты ортогональности // Качество графической подготовки: проблемы, традиции и инновации: Материалы VII Международной Интернет-конференции. Февраль – март 2017 г. Пермь, 2017.
9. *Волошинов Д. В.* Инструмент для геометрического эксперимента. Каким ему быть? // Проблемы качества графической подготовки: традиции и

инновации: Материалы V Международной Интернет-конференции. Февраль – март 2015 г. Пермь, 2015.
10. *Волошинов Д. В.* Конструктивное геометрическое моделирование. Теория, практика, автоматизация. Saarbrücken: Lambert Academic Publ., 2010.— 355 с.
11. *Волошинов Д. В.* Геометрическая лаборатория. Новый геометрический инструмент // Качество графической подготовки: проблемы, традиции и инновации: Материалы VII международной Интернет-конференции. Февраль – март 2017 г. Пермь, 2017.
12. *Вольберг А. О.* Основные идеи проективной геометрии. М.-Л.: Учпедгиз, 1949.— 188 с.
13. *Гирш А. Г.* Наглядная мнимая геометрия / А. Г. Гирш. М.: Маска, 2008.— 216 с.
14. *Глаголев Н. А.* Проективная геометрия. М.: Высшая школа, 1963.— 342 с.
15. *Жижилкин И. Д.* Инверсия. М.: Изд-во МЦНМО, 2009.— 72 с.
16. *Короткий В. А.* Центральное проецирование двух компланарных коник в две окружности// Проблемы качества графической подготовки Материалы IV международной Интернет-конференции. Февраль – март 2014 г. Пермь, 2014.
17. *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика? Элементарный очерк идей и методов. — 3-е изд., испр. и доп. М.: МЦНМО, 2001.— 568 с.
18. *Пеклич В. А.* Мнимая начертательная геометрия: учеб. пособие / В. А. Пеклич. — М.: АСВ, 2007. — 104 с.
19. *Сальков Н. А.* Свойства циклид Дюпена и их применение. Ч. 1 / Н. А. Сальков // Геометрия и графика, 2015.— Т. 3.— № 1.— С. 16–25. DOI: 10.12737/10454.
20. *Сальков Н. А.* Свойства циклид Дюпена и их применение. Ч. 2 / Н. А. Сальков // Геометрия и графика, 2015.— Т. 3.— № 2.— С. 9–23. DOI: 10.12737/12164.
21. *Сальков Н. А.* Свойства циклид Дюпена и их применение. Ч. 3: сопряжения / Н. А. Сальков // Геометрия и графика, 2015.— Т. 3.— № 4.— С. 3–14. DOI: 10.12737/17345.
22. *Сальков Н. А.* Свойства циклид Дюпена и их применение. Ч. 4: приложения / Н. А. Сальков // Геометрия и графика, 2016.— Т. 4.— № 1. — С. 21–32. DOI: 10.12737/17347.
23. *Сальков Н. А.* Способы задания циклид Дюпена / Н. А. Сальков // Геометрия и графика, 2017.— Т. 5.— № 3. — С. 11–20. DOI: 10.12737.
24. *Сальков Н. А.* Циклида Дюпена и ее приложение: монография / Н. А. Сальков. М.: ИНФРА–М, 2016.— 141 с.
25. *Сальков Н. А.* Циклида Дюпена и кривые второго порядка. Ч. 1 / Н. А. Сальков // Геометрия и графика, 2016.— Т. 4.— № 2.— С. 19–28. DOI: 10.12737/19829.
26. *Сальков Н. А.* Циклида Дюпена и кривые второго порядка. Ч. 2 / Н. А. Сальков // Геометрия и графика, 2016.— Т. 4.— № 3.— С. 17–28. DOI: 10.12737/21530.
27. *Филиппов П. В.* Начертательная геометрия многомерного пространства и ее приложения. Изд. 2-е. М.: ЛЕНАНД, 2016.— 282 с.
28. *Четверухин Н. Ф.* Проективная геометрия. М.: Просвещение, 1953.— 360 с.
29. *Viete F.* Apollonius Gallus. Paris, 1600.

30. *Staudt G. K. C.* Geometrie der Lage. Nürnberg: Verlag von Bauer und Raspe (Julius Merz), 1847.

References

1. Adamar J. *Jelementarnaja geometrija. Chast' I. Planimetrija* [Elementary geometry. Part I. Planimetry]. Moskow, Uchpedgiz Publ., 1948. 608 p. (in Russian).
2. Argunov B.I., Balk M.B. *Geometricheskie postroenija na ploskosti* [Geometric constructions on the plane]. Moskow, Uchpedgiz Publ., 1957. 268 p. (in Russian).
3. Bakelman I. Ya. *Inversija* [Inversion]. Moskow, Nauka Publ., 1966. 79 p. (in Russian).
4. Valkov K. I. *Vvedenie v teoriju modelirovanija* [Introduction to the theory of modeling]. Leningrad, LISI Publ., 1974. 152 p. (in Russian).
5. Volkov V. Y., Yurkov V. Yu, Panchuk K. L., Kaigorodtseva N. V. *Kurs nachertatel'noj geometrii na osnove geometricheskogo modelirovanija: uchebnik* [A course in descriptive geometry on the basis of geometrical modeling]. Omsk, SibADI Publ., 2010. 253 p. (in Russian).
6. Voloshinov D. V. *Algoritm reshenija zadachi Apollonija na osnove postroenija ortogonal'nyh okruzhnostej* [The algorithm for solving the Apollonian problem based on the construction of orthogonal circles]. *XXVI Mezhdunarodnaja nauchnaja konferencija Grafikon-2016* [XXVI International Scientific Conference GRAPHICON'2016]. Proceedings of conference, Nizhny Novgorod, 2016, pp. 284–288. (in Russian).
7. Voloshinov D. V. *Geometricheskaja laboratorija. Zakladyvaem osnovy* [Geometric laboratory. Found the groundwork]. *VII Mezhdunarodnaya internet-konferentsiya KGP-2017* [VII international online conference, HACO-2017]. Available at: http://dgng.pstu.ru/conf2017/papers/53. (in Russian).
8. Voloshinov D. V. *Geometricheskaja laboratorija. Instrumenty ortogonal'nosti* [Geometric laboratory. Tools of orthogonality]. *VII Mezhdunarodnaya internet-konferentsiya KGP-2017* [VII international online conference, HACO-2017]. Available at: http://dgng.pstu.ru/conf2017/papers/72. (in Russian).
9. Voloshinov D. V. *Instrument dlya geometricheskogo eksperimenta. Kakim emu byt'?* [Tool geometry for the experiment. What it be?]. *V Mezhdunarodnaya internet-konferentsiya KGP-2015* [V international online conference, HACO-2015]. Available at: http://dgng.pstu.ru/conf2015/papers/47. (in Russian).
10. Voloshinov D. V. *Konstruktivnoe geometricheskoe modelirovanie. Teorija, praktika, avtomatizacija* [Constructive geometric modeling. Theory, practice, automation]. Saarbrücken: Lambert Academic Publ., 2010. 355 p. (in Russian).
11. Voloshinov D. V. *Geometricheskaja laboratorija. Novyj geometricheskij instrument* [Geometric laboratory. New geometric tool]. *VII Mezhdunarodnaya internet-konferentsiya KGP-2017* [VII international online conference, HACO-2017]. Available at: http://dgng.pstu.ru/conf2017/papers/60. (in Russian).
12. Volberg A. O. *Osnovnye idei proektivnoj geometrii* [Basic ideas of projective geometry]. Moskow-Leningrad, Uchpedgiz Publ., 1949. 188 p. (in Russian).
13. Hirsch A.G. *Nagljadnaja mnimaja geometrija* [Visual imaginary geometry]. Moskow, Maska Publ., 2008. 216 p (in Russian).
14. Glagolev N. A. *Proektivnaja geometrija* [Projective geometry]. Moskow, Vysshaya shkola Publ.,1963. 342 p. (in Russian).
15. Zhizhilkin I. D. *Inversija* [Inversion]. Moskow, MTsNMO Publ., 2009. 72 p. (in Russian).

16. Korotky V. A. *Central'noe proecirovanie dvuh komplanarnyh konik v dve okruzhnosti* [The central projection of two coplanar conics to two circles]// Problems of quality of graphic training materials of the IV international Internet-conference. February – March 2014, Perm, Russia, 2014. (in Russian). *IV Mezhdunarodnaya internet-konferentsiya KGP-2014* [IV international online conference, HACO-2014]. (in Russian).
17. Courant P., Robbins G. *Chto takoe matematika? Jelementarnyj ocherk idej i metodov* [What is mathematics? Elementary sketch of ideas and methods]. Moskow, MTsNMO Publ, 2001. 568 p. (in Russian).
18. Peklich V. A. *Mnimaja nachertatel'naja geometrija* [Imaginary descriptive geometry]. Moscow, ASV Publ., 2007. 104 p. (in Russian).
19. Sal'kov N. A. *Svojstva ciklid Djupena i ih primenenie. Chast' 1* [Properties of Dupin cyclides and their application. Part 1]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics], 2015. V. 3. I 1, pp. 16–25. (in Russian). DOI: 10.12737/10454.
20. Sal'kov N. A. *Svojstva ciklid Djupena i ih primenenie. Chast' 2* [Properties of Dupin cyclides and their application. Part 2]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics], 2015. V. 3, I. 2, pp. 9–23. (in Russian). DOI: 10.12737/12164.
21. Sal'kov N. A. *Svojstva ciklid Djupena i ih primenenie. Chast' 3* [Properties of Dupin cyclides and their application. Part 3]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2015. V. 3, I. 4, pp. 3–14. (in Russian). DOI: 10.12737/17345.
22. Sal'kov N. A. *Svojstva ciklid Djupena i ih primenenie. Chast' 4* [Properties of Dupin cyclides and their application. Part 4]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics], 2016. V. 4, I. 1, pp. 21–32. (in Russian). DOI: 10.12737/17347.
23. Sal'kov N. A. *Sposoby zadanija ciklid Djupena* [Methods of Dupin's cyclides definition]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2017, V. 5, I. 3, pp. 11–20. (in Russian). DOI: 10.12737.
24. Sal'kov N. A. *Cyclide Dupin and its application* [Dupin's cyclide and its application]. Moskow, INFRA-M Publ., 2016. 141 p. (in Russian).
25. Sal'kov N. A. *Ciklida Djupena i krivye vtorogo porjadka. Chast' 1* [Dupin's cyclide and second order curves. Part 1]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2016. V. 4, I. 2, pp. 19–28. (in Russian). DOI: 10.12737/19829.
26. Sal'kov N. A. *Ciklida Djupena i krivye vtorogo porjadka. Chast' 2* [Dupin's cyclide and second order curves. Part 2]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2016. V. 4, I. 3, pp. 17–28. (in Russian). DOI: 10.12737/21530.
27. Filippov .P. V *Nachertatel'naja geometrija mnogomernogo prostranstva i ee prilozhenija* [Descriptive geometry of multidimensional space and its applications]. Moskow, LENAND Publ., 2016. 282 p. (in Russian).
28. Chetverukhin N. F. *Proektivnaja geometrija* [Projective geometry]. Moskow, Prosveshenie Publ., 1953. 360 p. (in Russian).
29. Viete F. Apollonius Gallus, Paris, 1600.
30. Staudt K. G. C. Geometrie der Lage, Nürnberg, Verlag von Bauer und Raspe (Julius Merz), 1847.