6. Метрические задачи

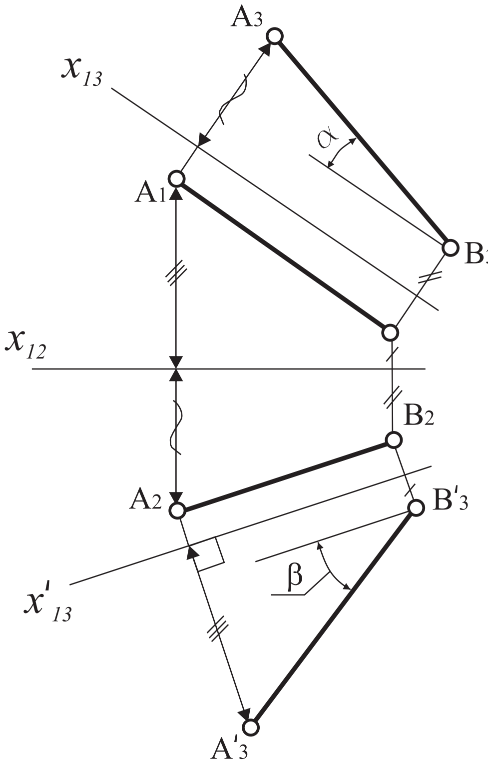
6.1. Определение длины отрезка

Отрезок проецируется без искажения на плоскость проекций параллельную данному отрезку, или совпавшую с ним .

6.1.1. Определение длины отрезка АВ.

Способ дополнительного ортогонального проецирования (ДОП)

Дополнительная плоскость проекций π_3 вводится параллельно отрезку АВ.



$AB \parallel \pi_3$

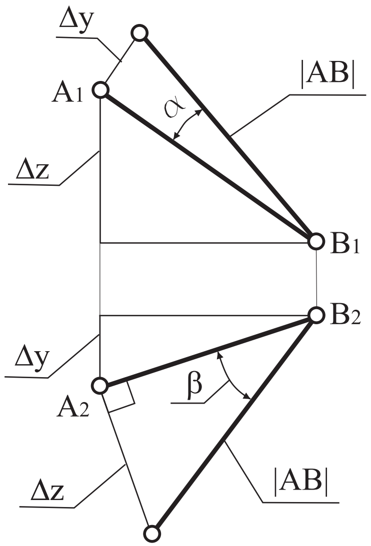
$\pi_3 \perp \pi_1$ $\qquad \alpha = |AB \wedge \pi_1|$

$AB \parallel \pi'_3$

$\pi'_3 \perp \pi_2$ $\qquad \beta = |AB \wedge \pi_2|$

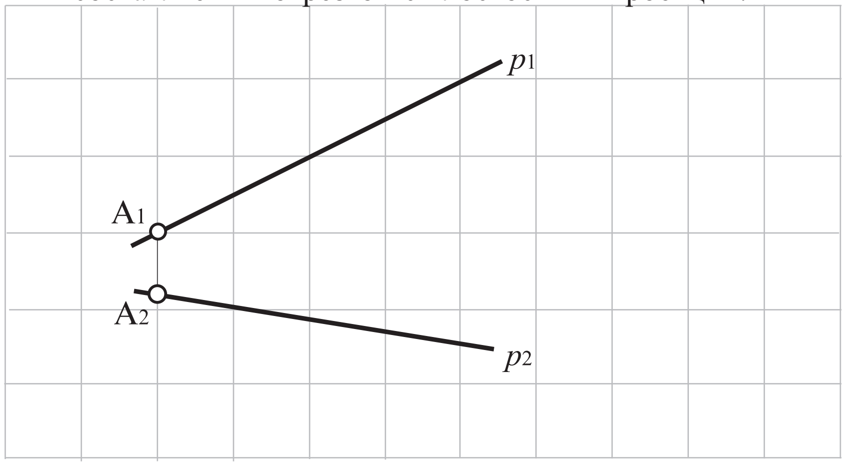
$|AB| = A_3B_3 = A'_3B'_3$

Способ прямоугольного треугольника

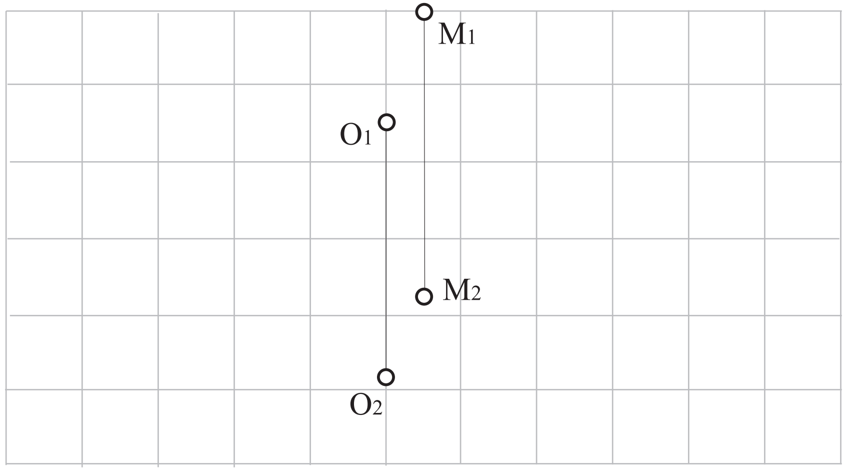


Длина отрезка равна гипотенузе прямоугольного треугольника, за один из катетов которого принимается его проекция, например A_2B_2, длина другого катета равна превышению концов отрезка в другом поле проекций (Δz).

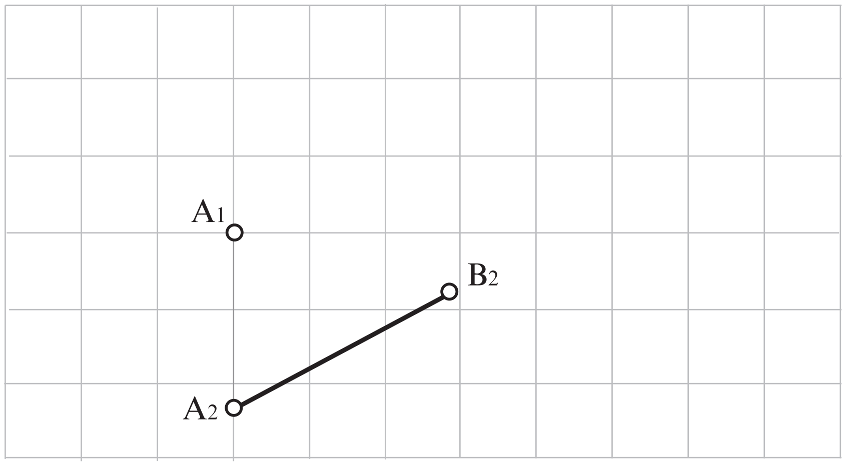
6.1.2. Отложить на заданной прямой *p* отрезок AB, равный 40 мм и определить величину углов, составляемых отрезком с плоскостями проекций.



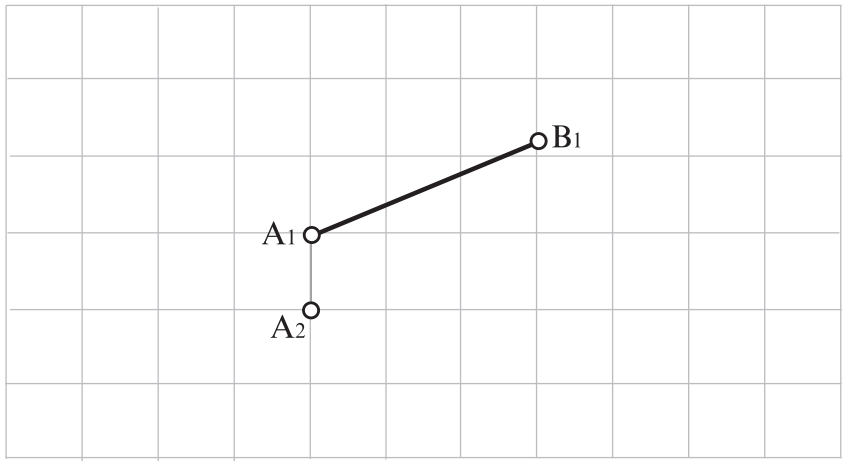
6.1.4. Построить очерковые окружности сферы, при условии, что O - центр сферы, а M - точка на ее поверхности.



6.1.3. Достроить фронтальную проекцию отрезка AB, если длина отрезка равна 40 мм.



6.1.5. Достроить горизонтальную проекцию отрезка AB, если он составляет с плоскостью π_1 угол 30^0.



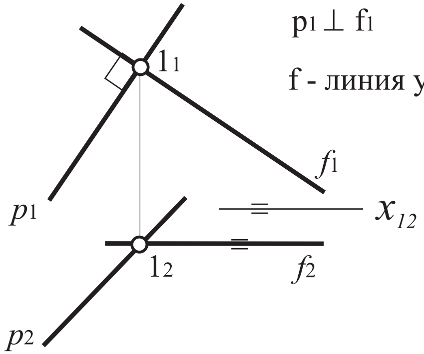
6.2. Построение взаимно перпендикулярных геометрических образов

Построение проекций взаимно перпендикулярных геометрических образов основано на правиле моделирования прямого угла:

Прямой угол моделируется в натуральную величину на плоскость проекций, если одна его сторона является линией уровня по отношению к этой плоскости, а другая сторона не перпендикулярна ей.

6.2.1. Построение проекций взаимно перпендикулярных прямых.

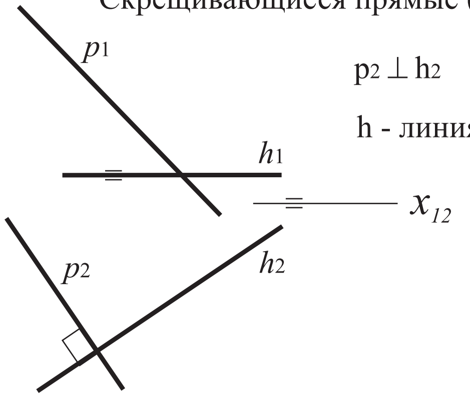
Пересекающиеся прямые ($p \cap f$)



$p_1 \perp f_1$

f - линия уровня (фронталь)

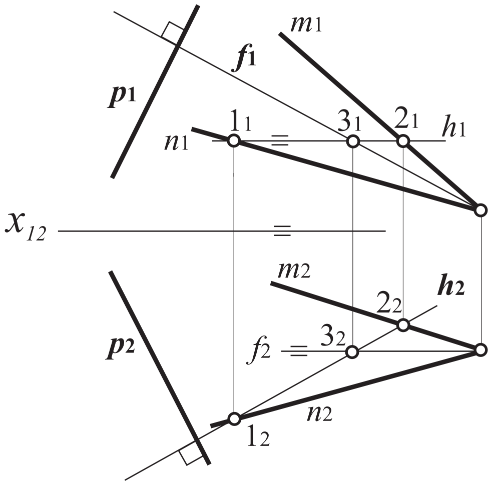
Скрещивающиеся прямые ($p \dot{-} h$)



$p_2 \perp h_2$

h - линия уровня (горизонталь)

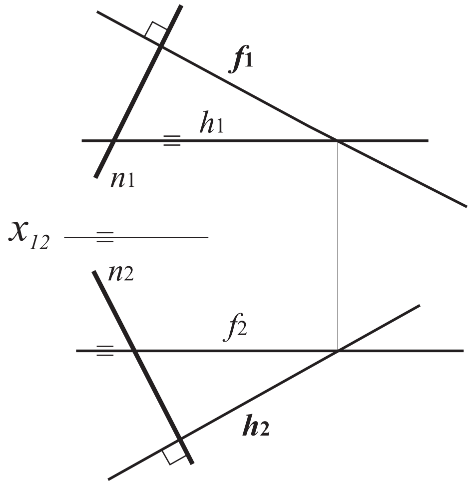
6.2.2. Построение прямой *p* перпендикулярной плоскости $\alpha(m, n)$.



$p_1 \perp f_1$

$p_2 \perp h_2$

6.2.3. Построение плоскости α перпендикулярной прямой *n*.

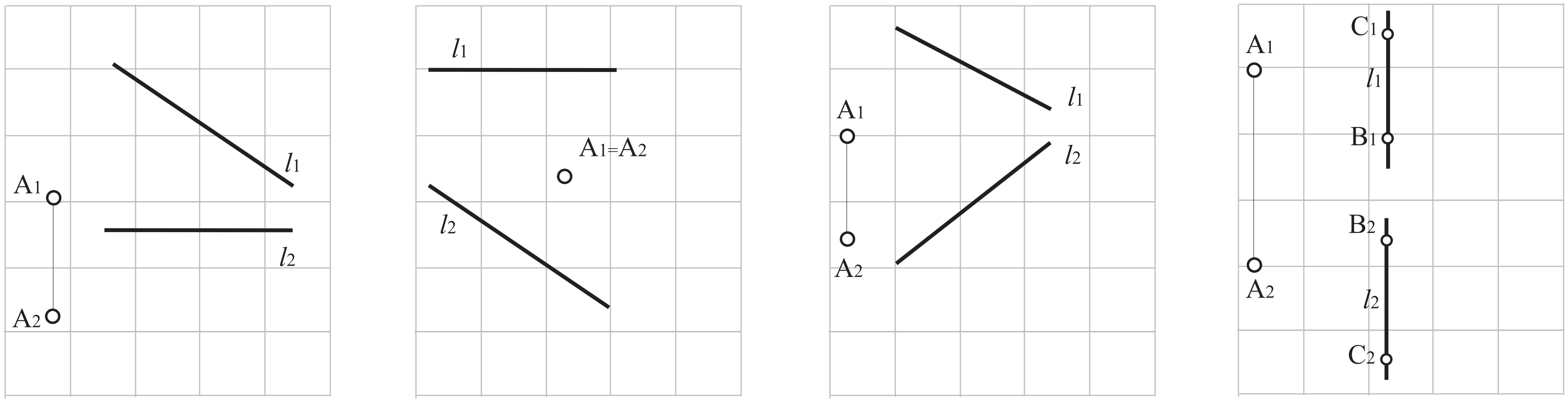


$\alpha(f, h)$

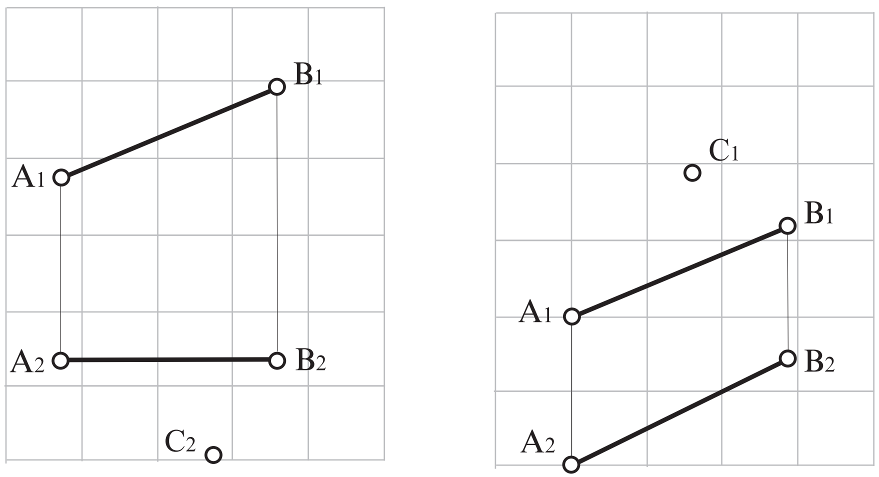
$f_1 \perp n_1$

$h_2 \perp n_2$

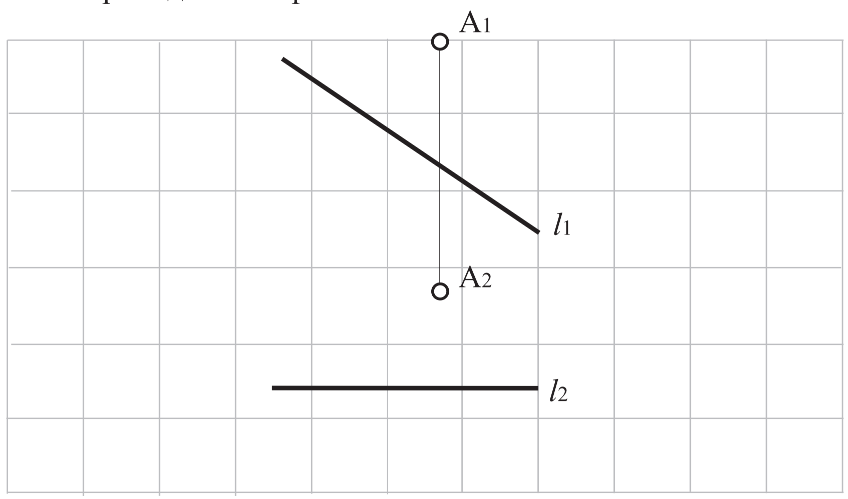
6.2.4. Через точку A провести прямую *p*, пересекающую заданную прямую *l* под углом 90° .



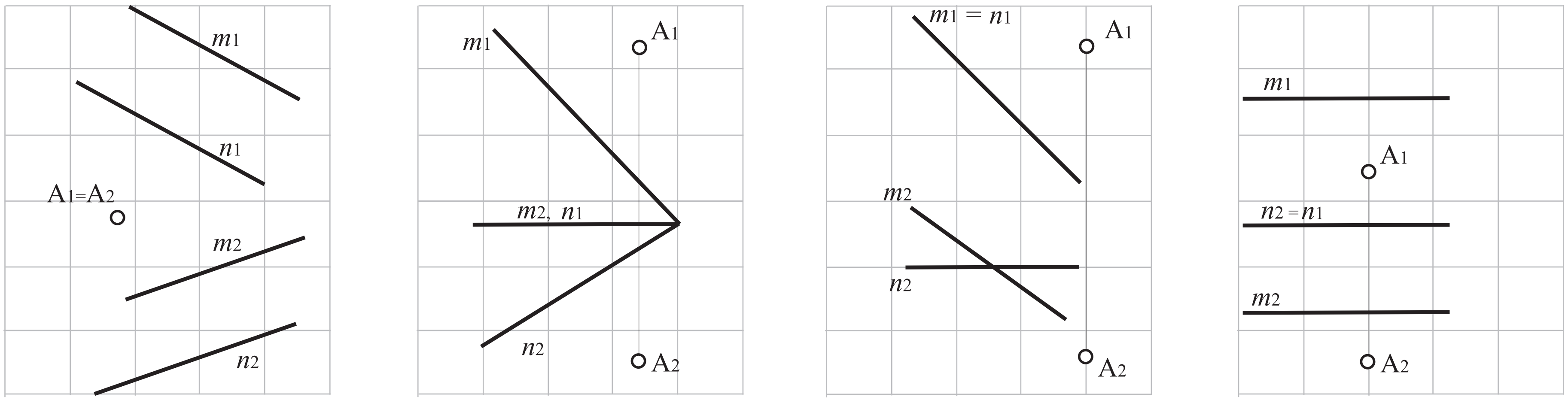
6.2.5. Достроить недостающую проекцию точки C, если известно, что точка C равноудалена от концов отрезка AB.



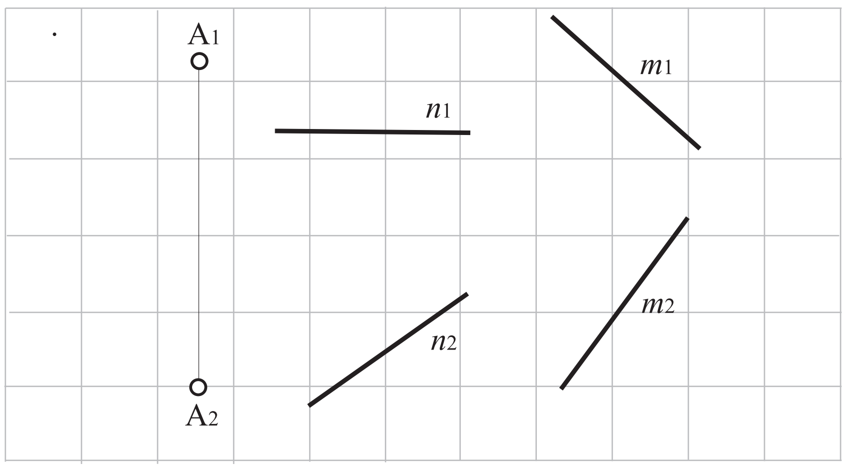
6.2.6. Построить ромб ABCD. Диагональ BD равна 40 мм и принадлежит прямой *l*.



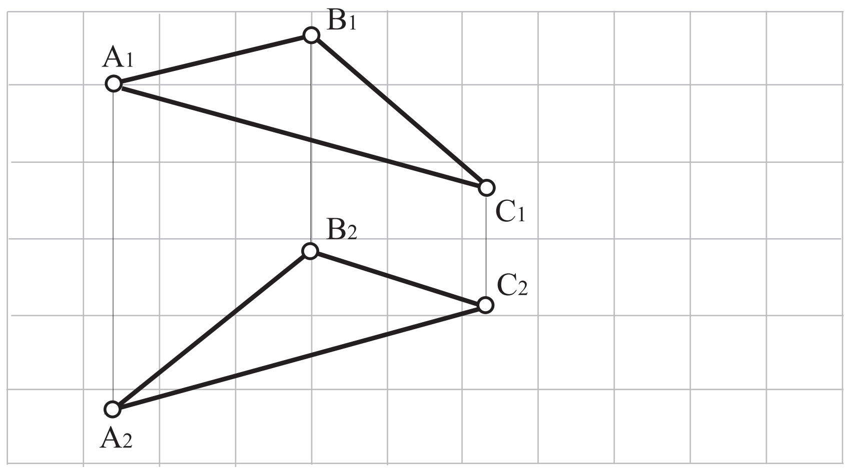
6.2.7. Из точки А опустить перпендикуляр на плоскость α (*m,n*) .



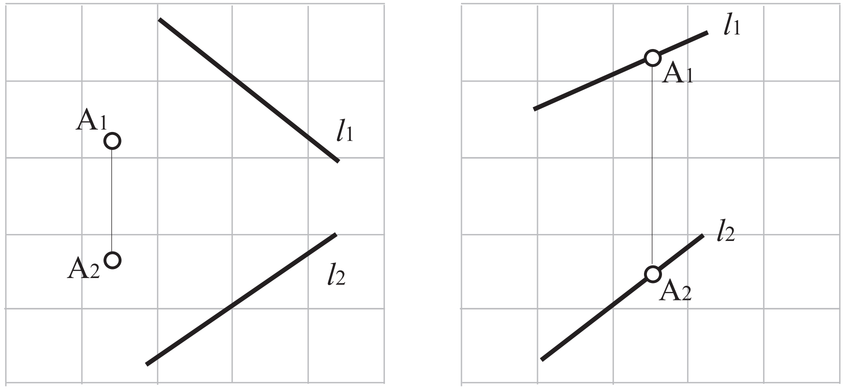
6.2.8. Через прямую *m* провести плоскость, перпендикулярную плоскости α(А, *n*).



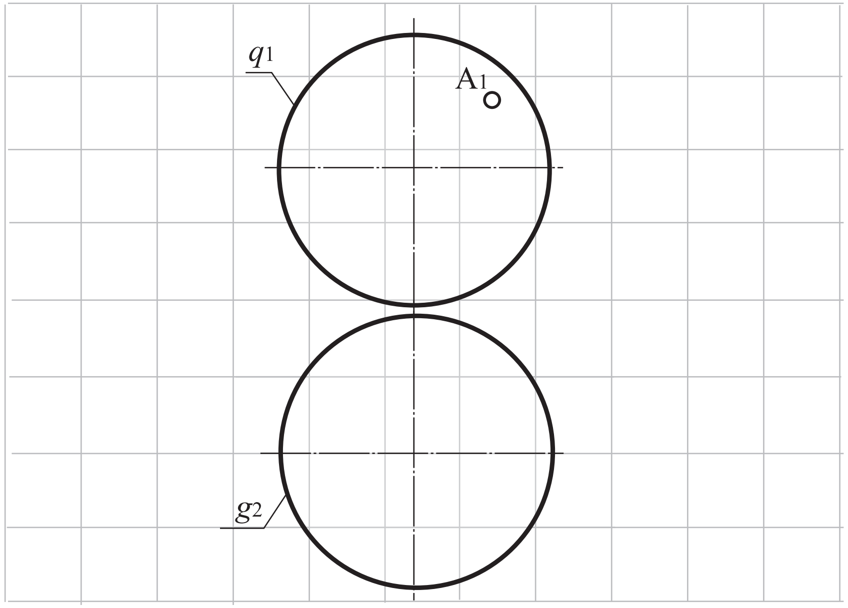
6.2.9. Из точки С восстановить перпендикуляр к плоскости α(АВС) длиной 25 мм .



6.2.10. Через точку А провести плоскость, перпендикулярную прямой l.



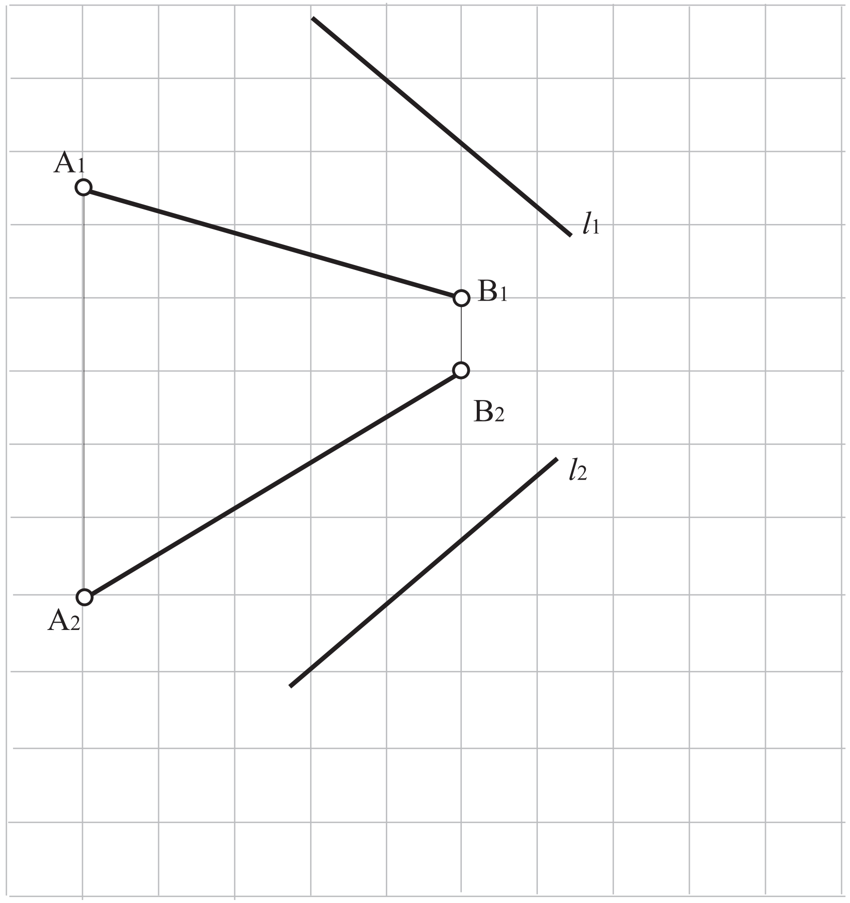
6.2.11. Задать плоскость, касательную к сфере $\Theta(q, g)$ в точке А, принадлежащей видимой части сферы.



6.2.12*. Построить проекции равнобедренного треугольника ABC с основанием AB и вершиной C, принадлежащей прямой l.

Алгоритм решения:

1. Через середину отрезка AB провести плоскость α, перпендикулярную отрезку.
2. Найти точку пересечения прямой l с плоскостью α.



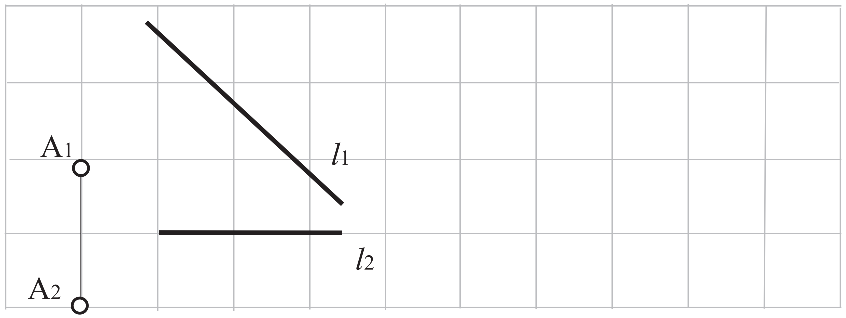
6.3. Определение кратчайшего расстояния между геометрическими образами

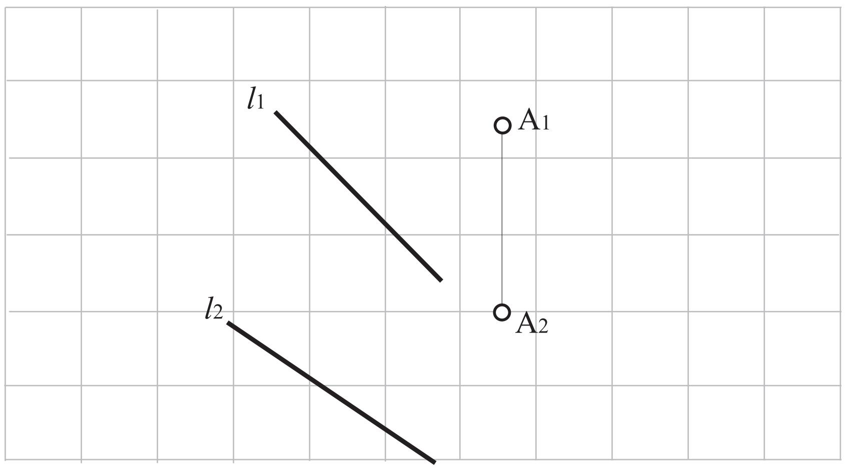
6.3.1. Определить расстояние от точки А до прямой *l* .

Расстояние от точки до прямой измеряется длиной перпендикуляра, опущенного из точки на прямую.

Алгоритм решения:

1. Через точку А провести прямую *p*, пересекающую заданную прямую *l* под углом 90°.
2. Определить длину отрезка перпендикуляра от точки А до прямой *l*.

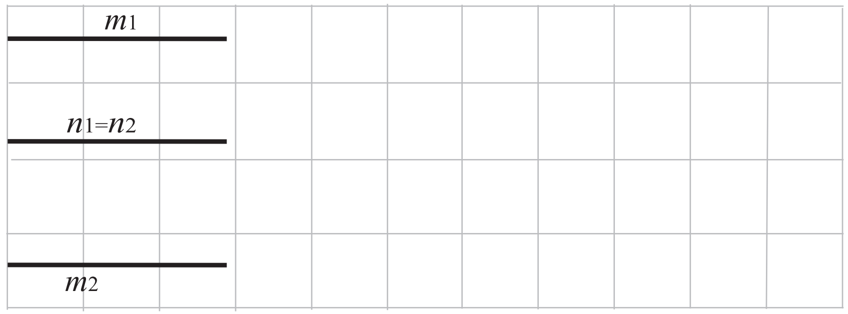


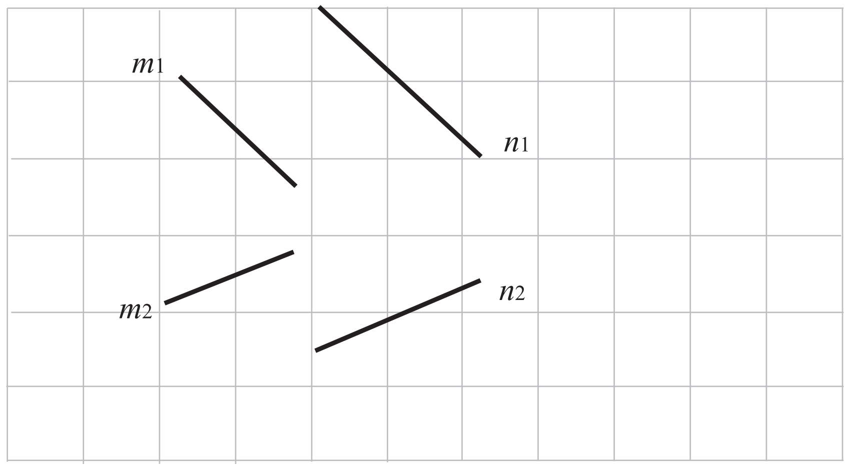


6.3.2. Определить расстояние между параллельными прямыми *m* и *n* .

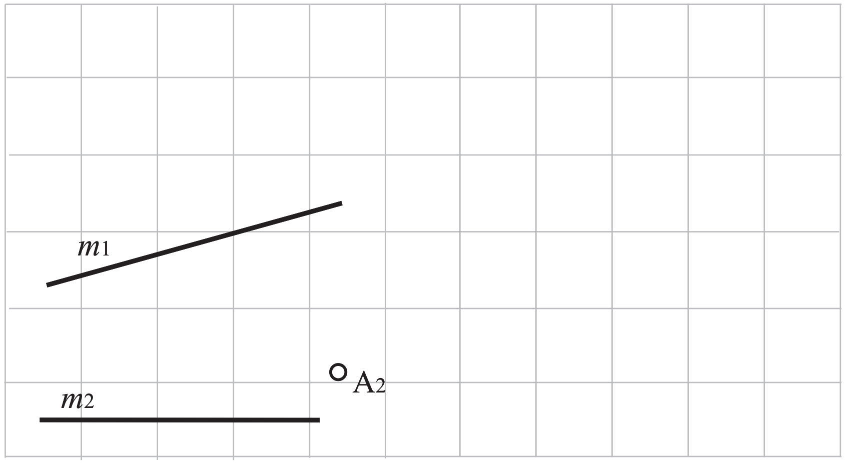
Алгоритм решения:

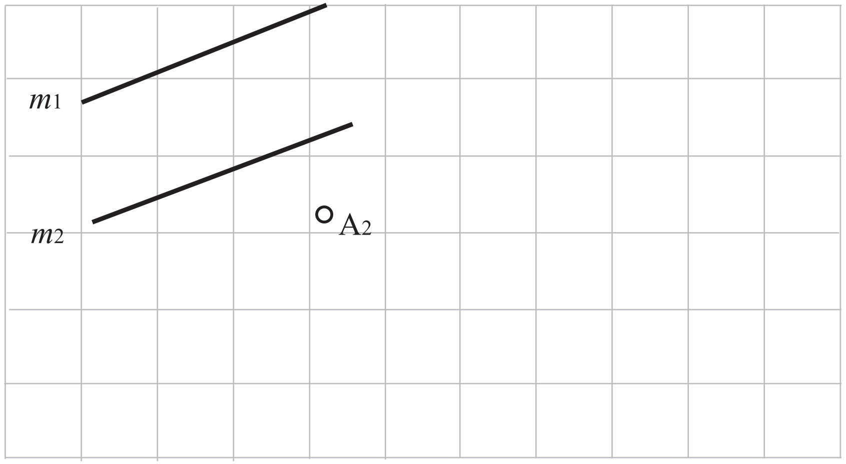
1. На одной из прямых, например *m,* отметить произвольную точку А.
2. Определить расстояние от точки А до прямой *n*.





6.3.3. Определить недостающую проекцию точки А, если известно, что расстояние от нее до прямой m равно 15 мм.

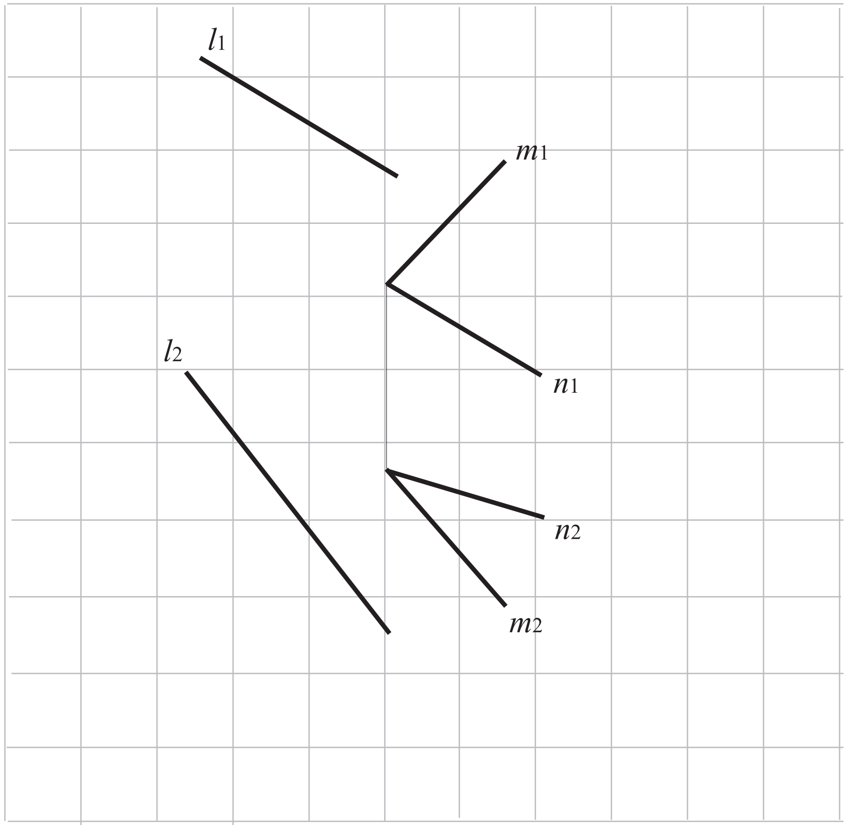




6.3.4*. В плоскости $\alpha(m,n)$ провести прямую, пересекающую заданную прямую l под углом 90°.

Алгоритм решения:

1. Через точку пересечения прямой l с плоскостью $\alpha(m,n)$ провести плоскость (β), перпендикулярную этой прямой - множество прямых, перпендикулярных прямой l.
2. Найти линию пересечения плоскости α с плоскостью β.

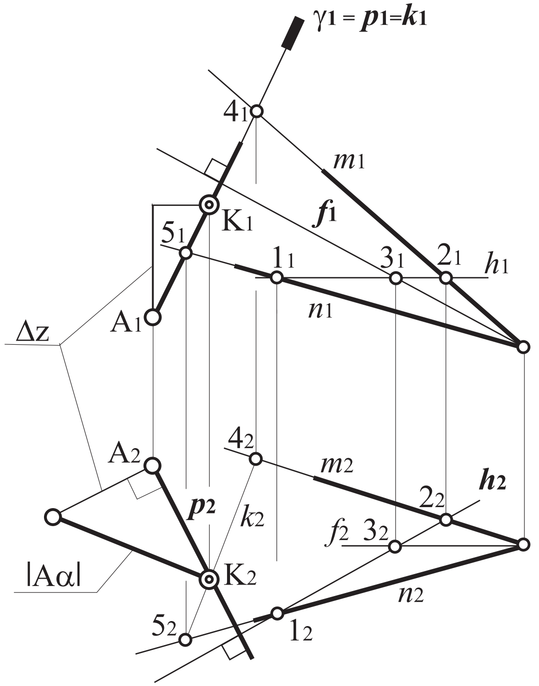


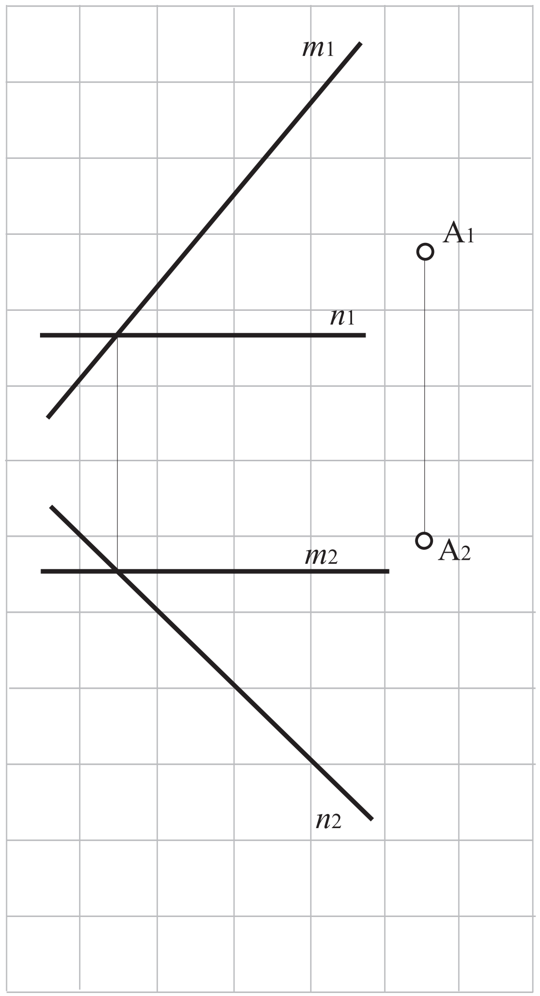
6.3.5. Определить расстояние от точки А до плоскости α (*m,n*) .

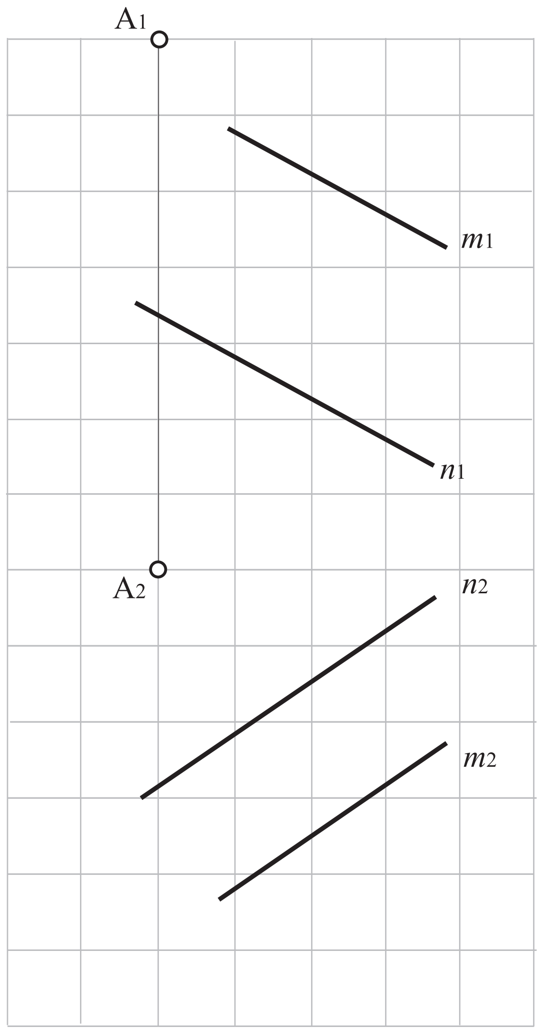
Расстояние от точки до плоскости измеряется длиной перпендикуляра,опущенного из точки на плоскость.

Алгоритм решения:

1. Из точки А опустить перпендикуляр на плоскость α(*m,n*):
   $p\ (p1 \perp f1,\ p2 \perp h2\ )$.
2. Найти точку пересечения прямой *p* с плоскостью α:
   $K = p \cap \alpha$
3. Определить длину отрезка АК:
   $|A\alpha| = |AK|$







6.3.6. Определить расстояние от точки А до плоскости α (*m,n*), используя способ ДОП .

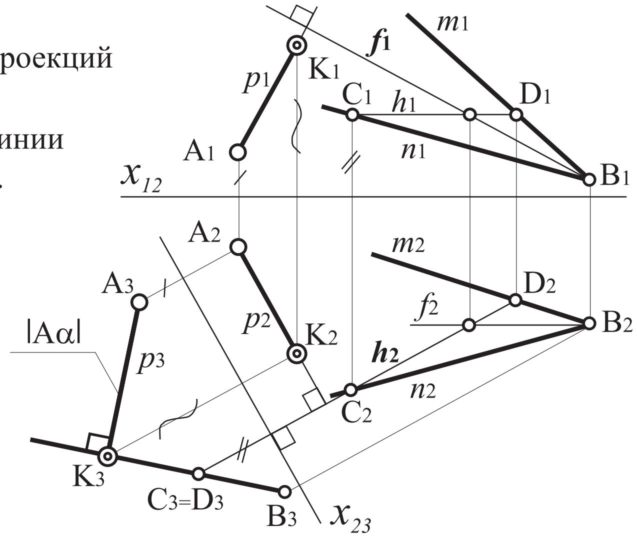
Дополнительная плоскость проекций

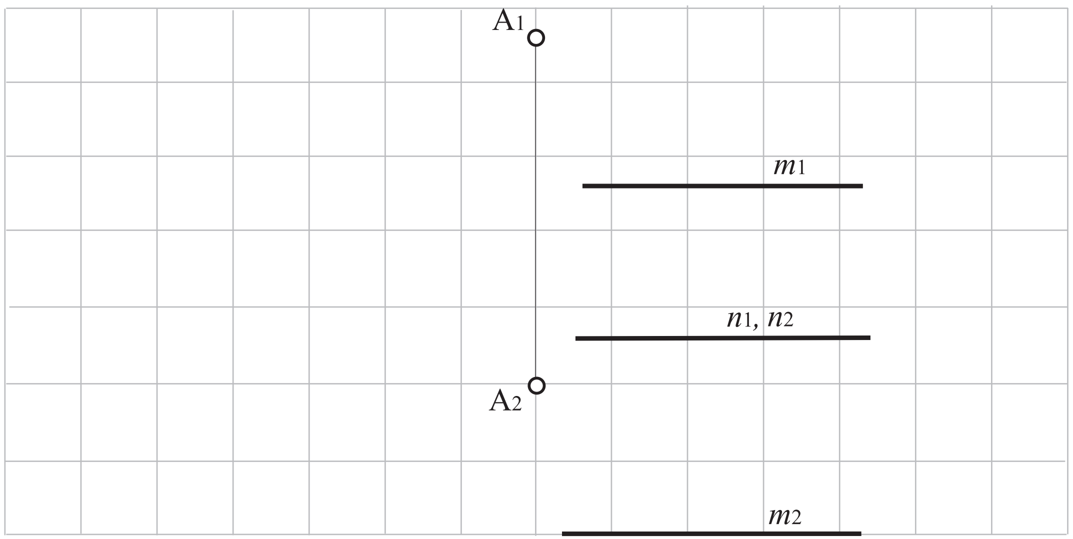
π_3 ($\pi_3 \perp \pi_2$)

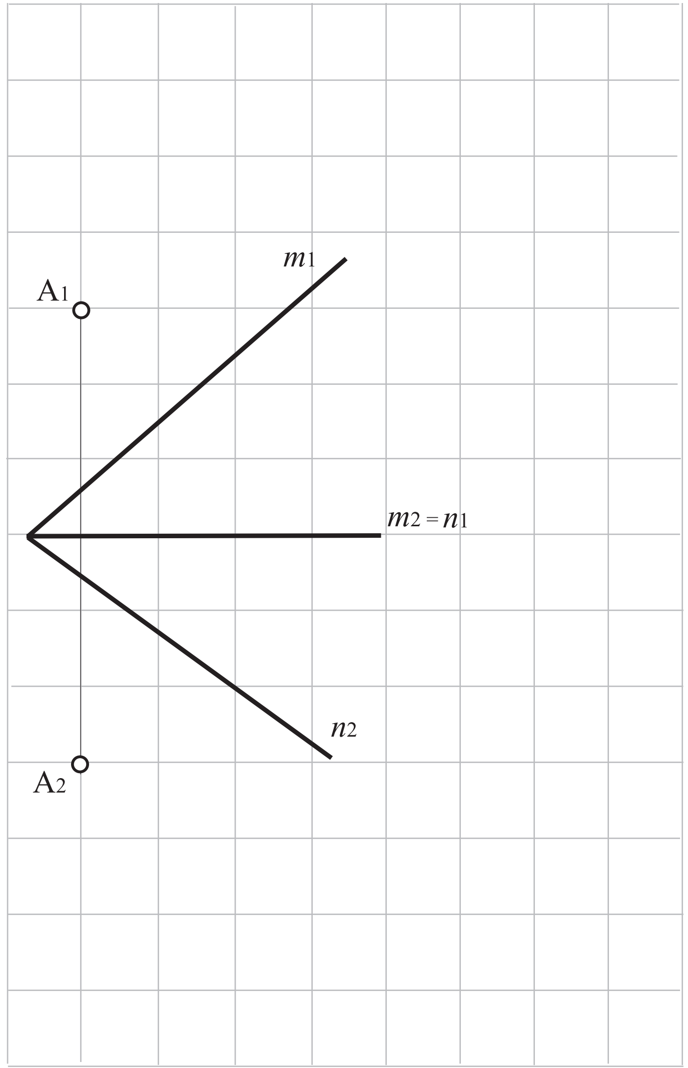
вводится перпендикулярно линии уровня (*h*) плоскости α(*m,n*).

$x_{23} \perp h_2$

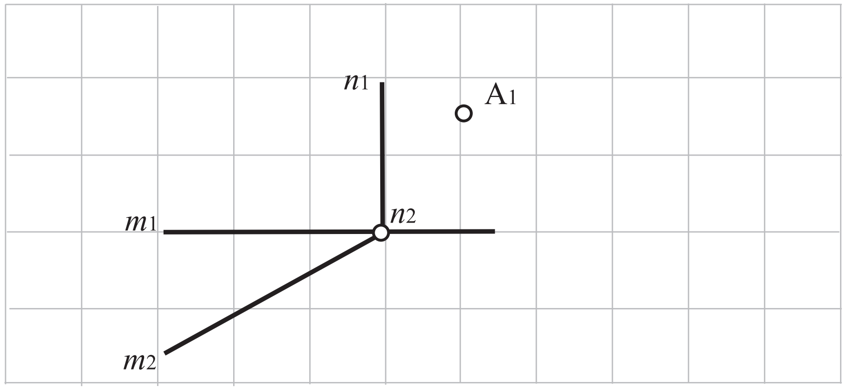
$|A\alpha| = A_3K_3$

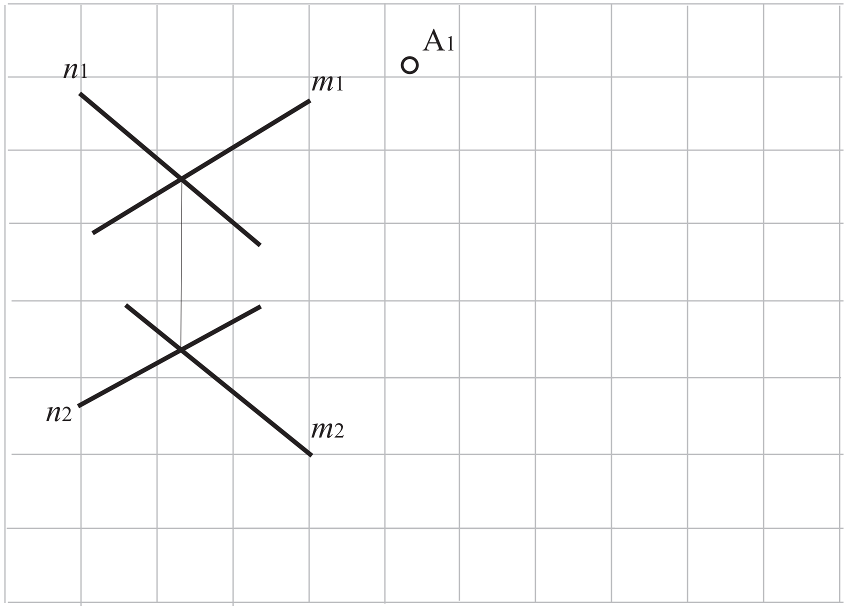






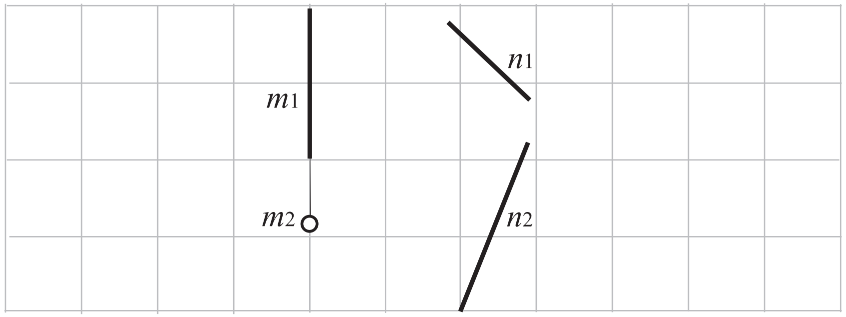
6.3.7. Определить горизонтальную проекцию точки А, если известно, что расстояние от нее до плоскости α (m,n) равно 15 мм.

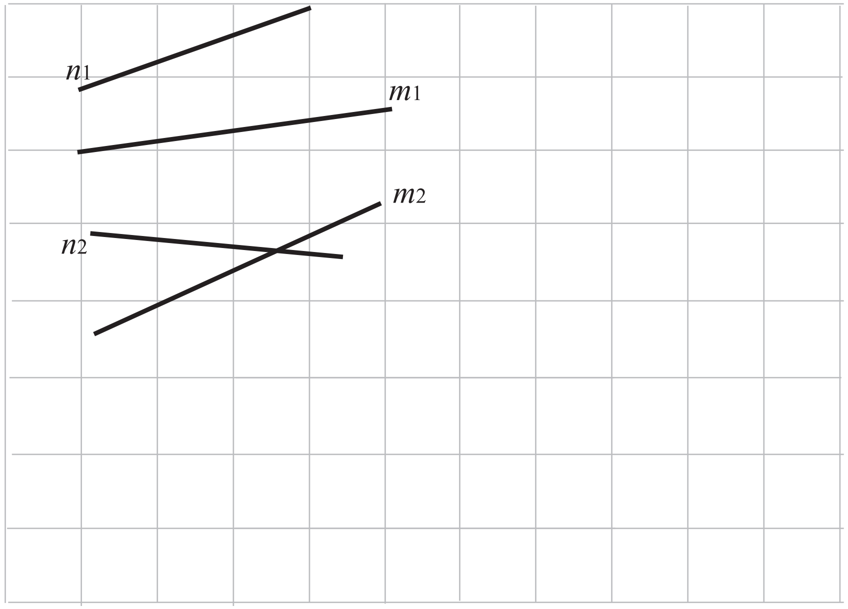




6.3.8. Определить расстояние между скрещивающимися прямыми m и n.

Расстояние между скрещивающимися прямыми измеряется длиной отрезка, перпендикулярного к обеим прямым.

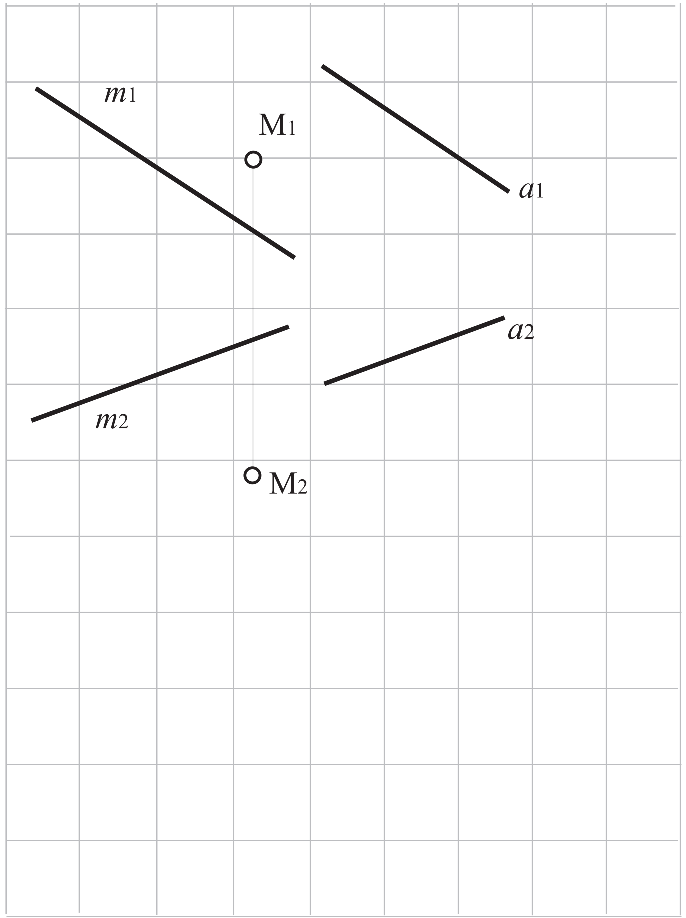




6.3.9. Определить расстояние от прямой a до параллельной ей плоскости α(M,m) .

Алгоритм решения:

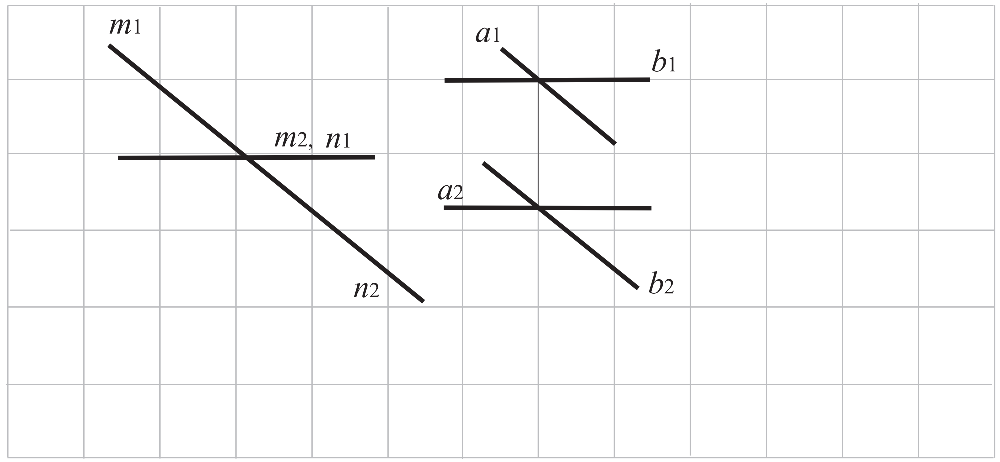
1. На прямой a отметить произвольную точку А.
2. Определить расстояние от точки А до плоскости α.

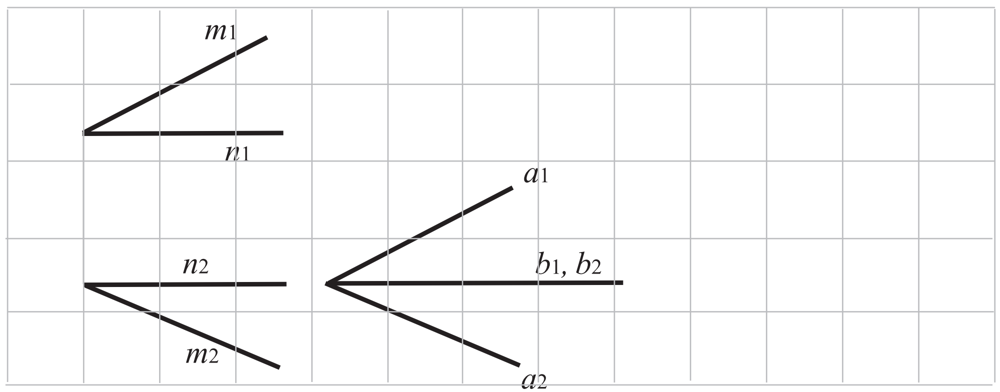


6.3.10. Определить расстояние между параллельными плоскостями α(m,n) и β(a,b).

Алгоритм решения:

1. На одной из плоскостей, например β, отметить произвольную точку А.
2. Определить расстояние от точки А до плоскости α.



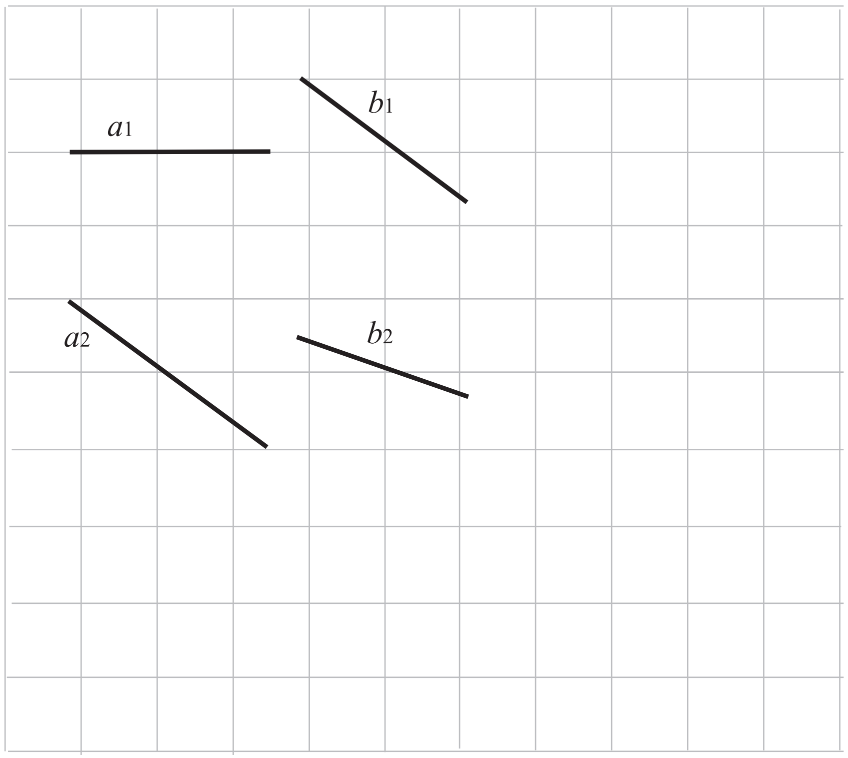


6.3.11*. Построить прямые, пересекающие прямую *b*, параллельные прямой *a* и отстоящие от последней на расстояние 20 мм.

Алгоритм решения:

1. Построить множество прямых, параллельных прямой *a* и отстоящих от нее на расстояние 20 мм (образующие цилиндра вращения с осью *a* и радиусом 20 мм) .
2. Найти точки пересечения (M, N) прямой *b* с поверхностью цилиндра.

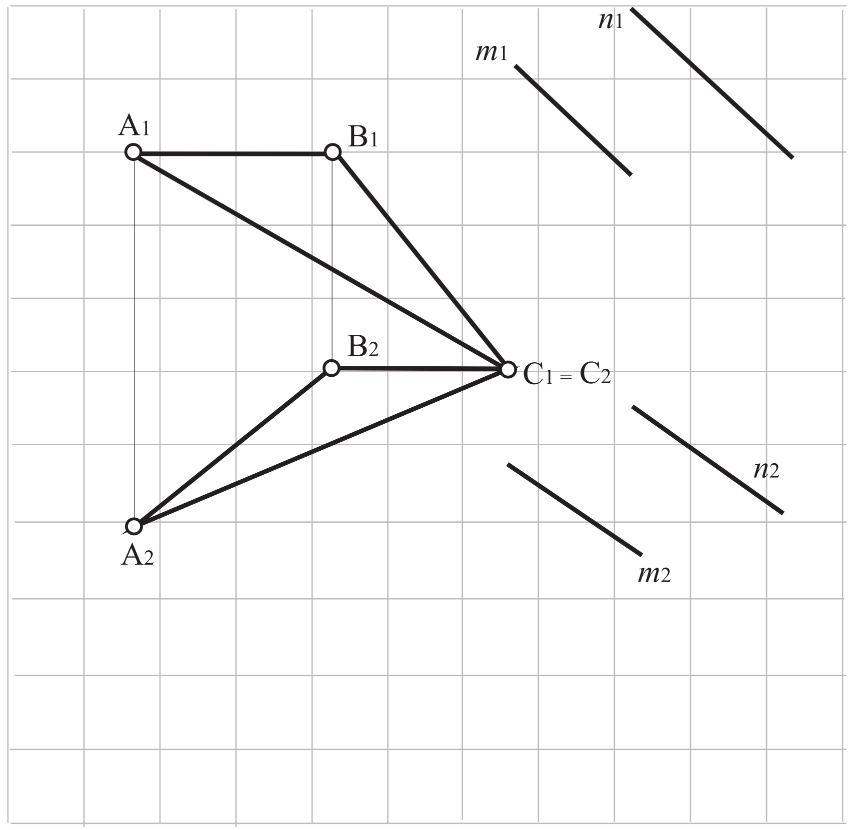
Искомые прямые - образующие цилиндра, проходящие через точки M и N.



6.3.12*. На плоскости $\alpha(m \parallel n)$ найти точку, равноудаленную от вершин треугольника ABC.

Алгоритм решения:

1. Построить множество точек, равноудаленных от точек A, B и C (прямая, проходящая через центр окружности, описанной вокруг треугольника ABC и перпендикулярная плоскости треугольника) .
2. Найти точку пересечения построенного перпендикуляра с заданной плоскостью $\alpha(m \parallel n)$.

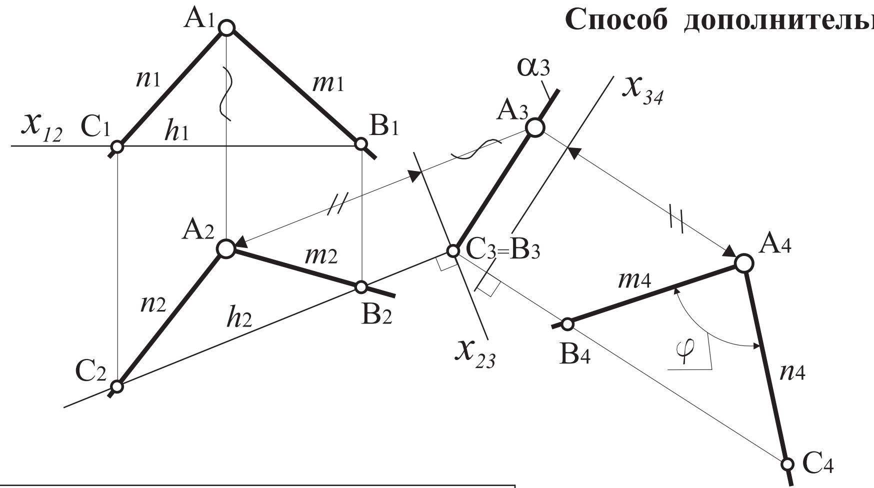


6.4. Определение величины углов между геометрическими образами

6.4.1. Определение величины угла между пересекающимися прямыми *m* и *n*.

Угол между пересекающимися прямыми моделируется в натуральную величину, если плоскость угла параллельна плоскости проекций.

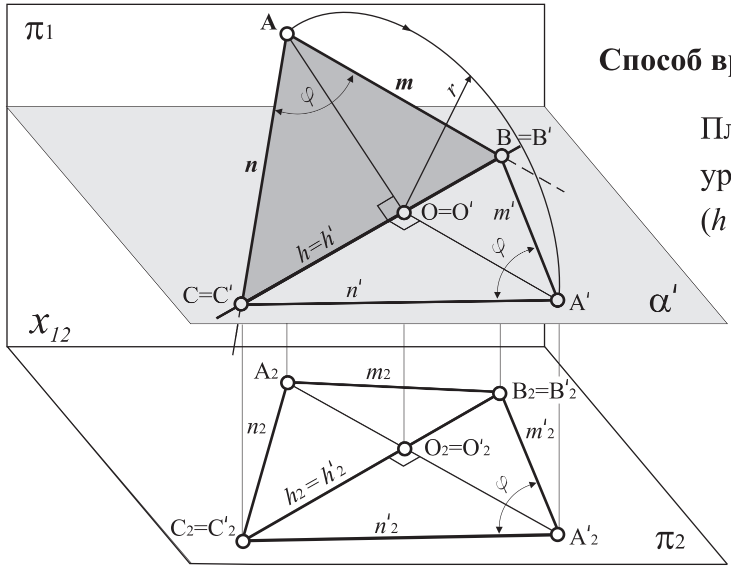
Способ дополнительного ортогонального проецирования



Преобразование плоскости угла в плоскость уровня производится в два этапа:

1. Плоскость угла преобразуется в проецирующую плоскость.
   Дополнительная плоскость проекций π_3 ($\pi_3 \perp \pi_2$) вводится перпендикулярно линии уровня (h) плоскости угла.
   $x_{23} \perp h_2$
2. Плоскость угла преобразуется в плоскость уровня.
   Дополнительная плоскость проекций π_4 ($\pi_4 \perp \pi_3$) вводится параллельно плоскости угла.
   $x_{34} \parallel \alpha_3$

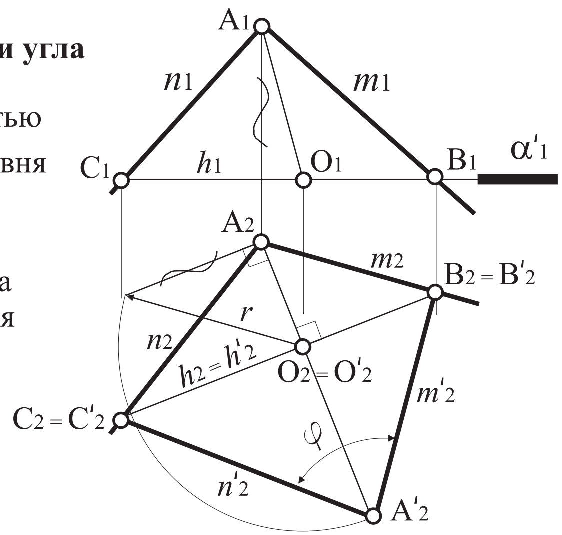
Способ вращения вокруг линии уровня плоскости угла



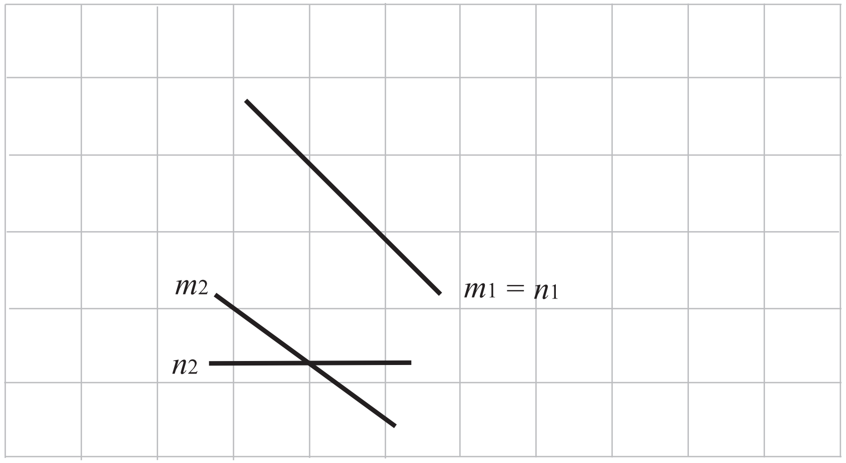
Плоскость α(m n) совмещается с плоскостью уровня ($\alpha' \parallel \pi_2$) вращением вокруг линии уровня ($h \parallel \pi_2$) плоскости угла.

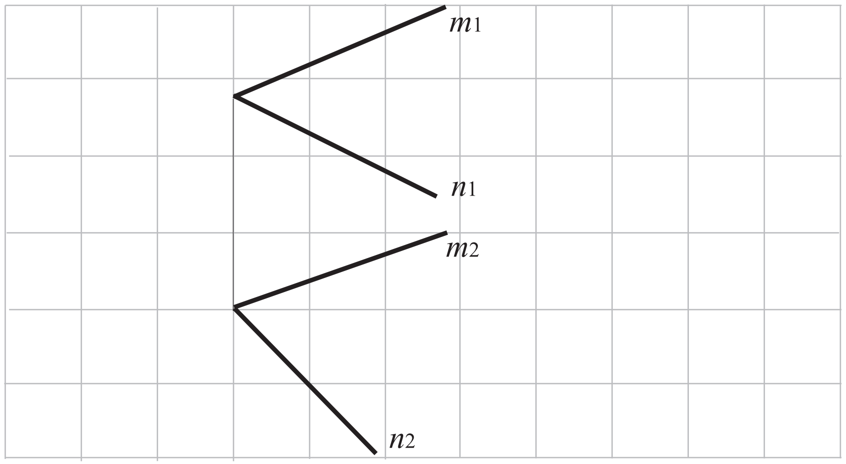
На эпюре Монжа величина радиуса вращения вершины угла определяется по его проекциям ($r = |AO|$).

$$|m \wedge n| = \varphi$$

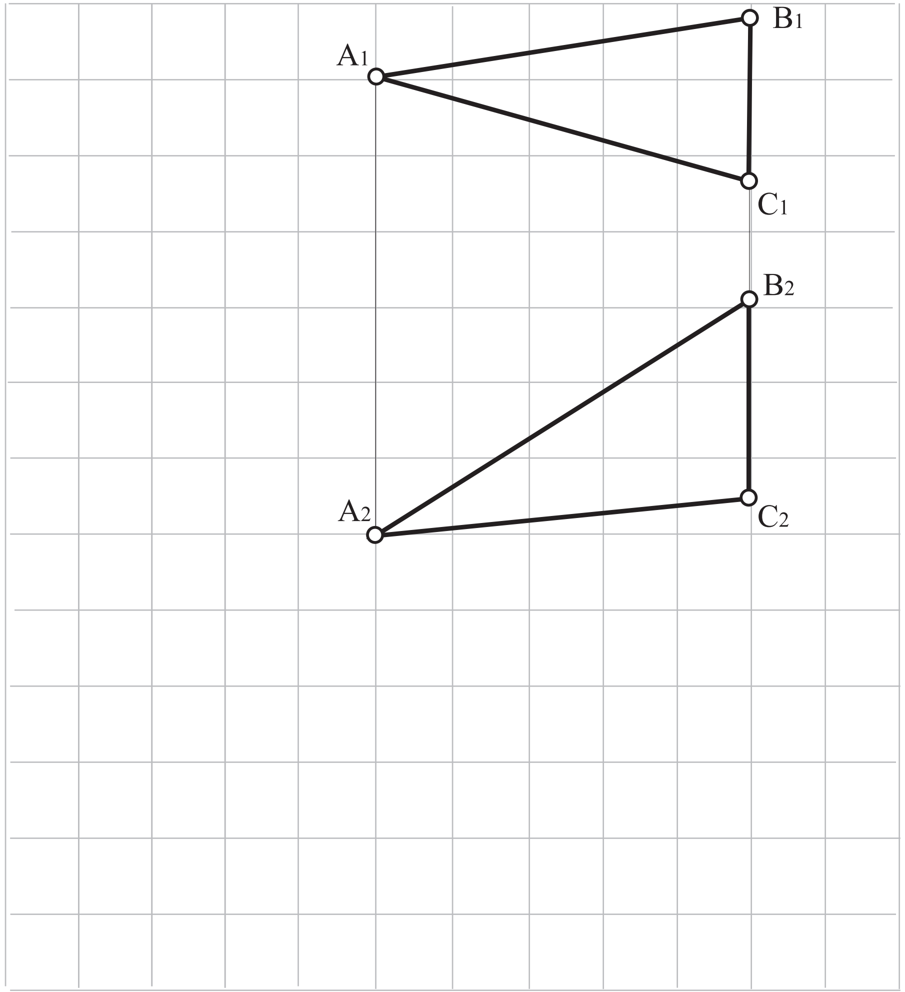


6.4.2. Определить величину угла между пересекающимися прямыми *m* и *n*.

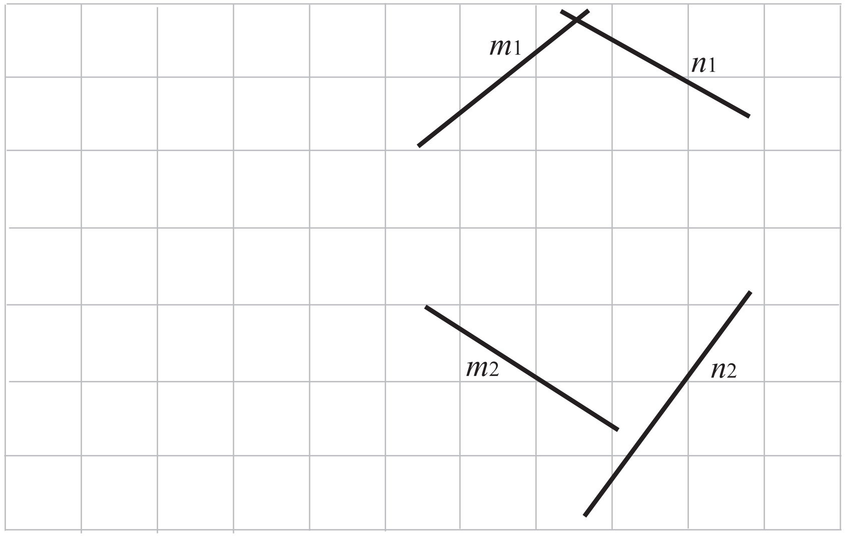


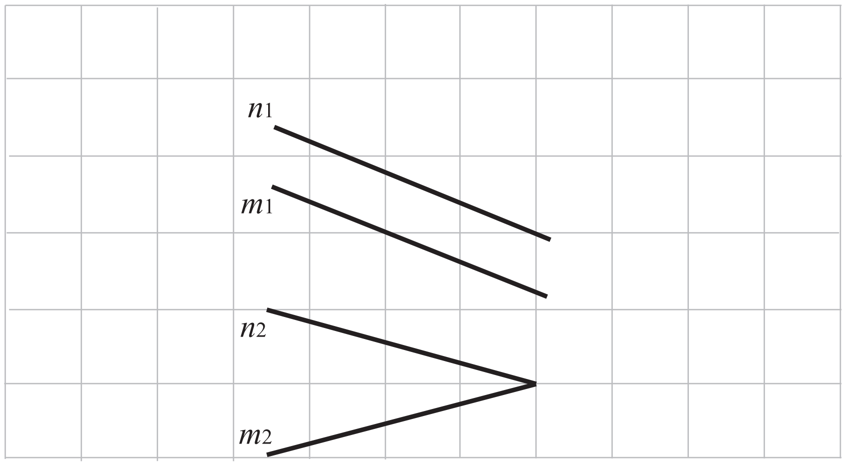


6.4.3. Найти центр окружности, вписанной в треугольник АВС.



6.4.4. Определить величину угла между скрещивающимися прямыми m и n.

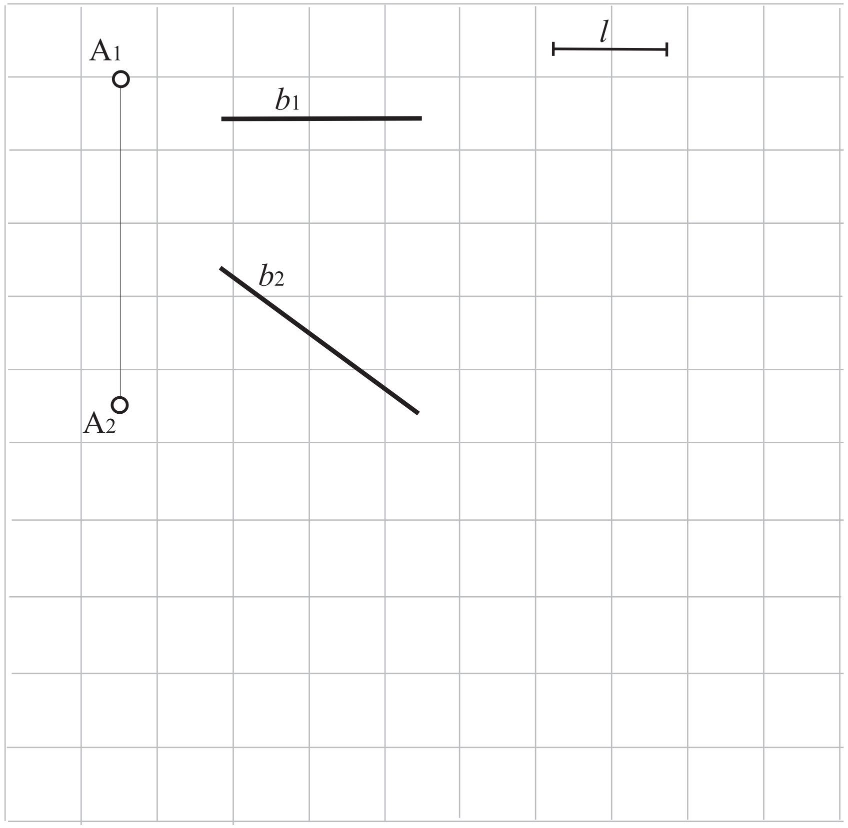




6.4.5.*. Через точку А провести прямые, отстоящие от прямой b на расстояние l и составляющие с ней угол 45°.

Алгоритм решения:

1. Построить множество прямых, отстоящих от прямой b на расстояние l (плоскости, касательные поверхности цилиндра вращения с осью b и радиусом l) и проходящих через точку А.
2. В построенных плоскостях провести через точку А прямые под заданным углом к прямым, параллельным прямой b.



6.4.6. Определить величину угла между прямой a и плоскостью α.

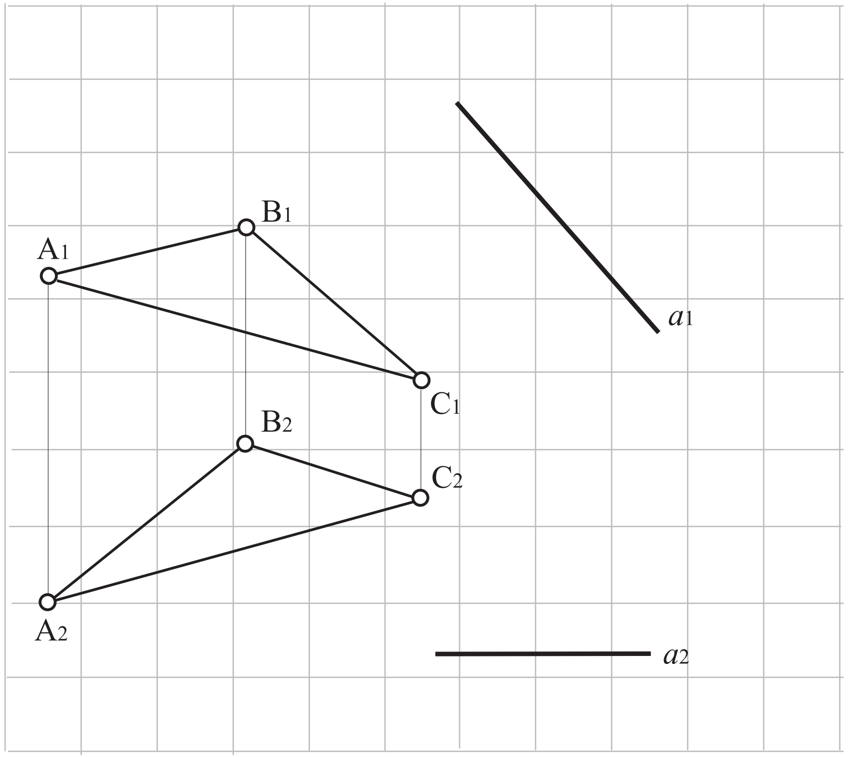
Угол между прямой и плоскостью равен углу между прямой и ее проекцией на плоскость.

Алгоритм решения:

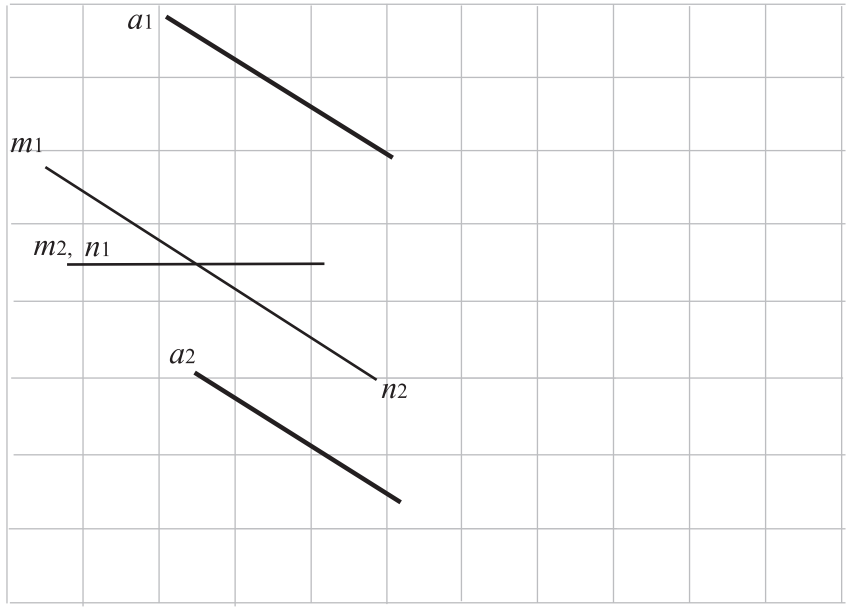
1. На прямой a отметить произвольную точку А.
2. Из точки А опустить перпендикуляр (p) на плоскость.
3. Определить угол (φ) между прямыми a и p

Искомый угол $\omega = 90° - \varphi$

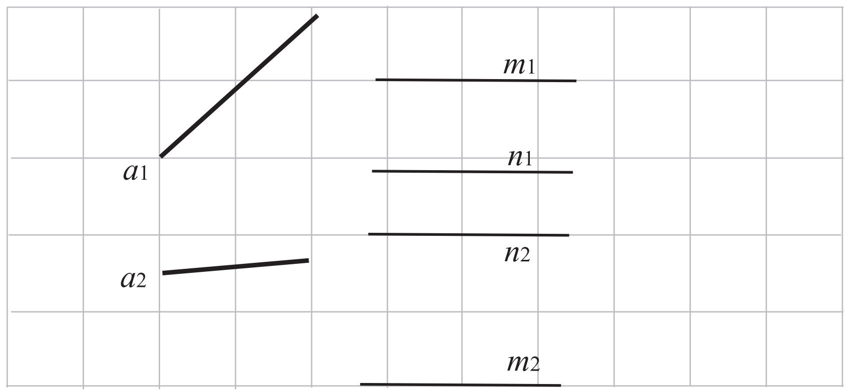
α(ABC)



$\alpha(m \cap n)$



α(m || n)

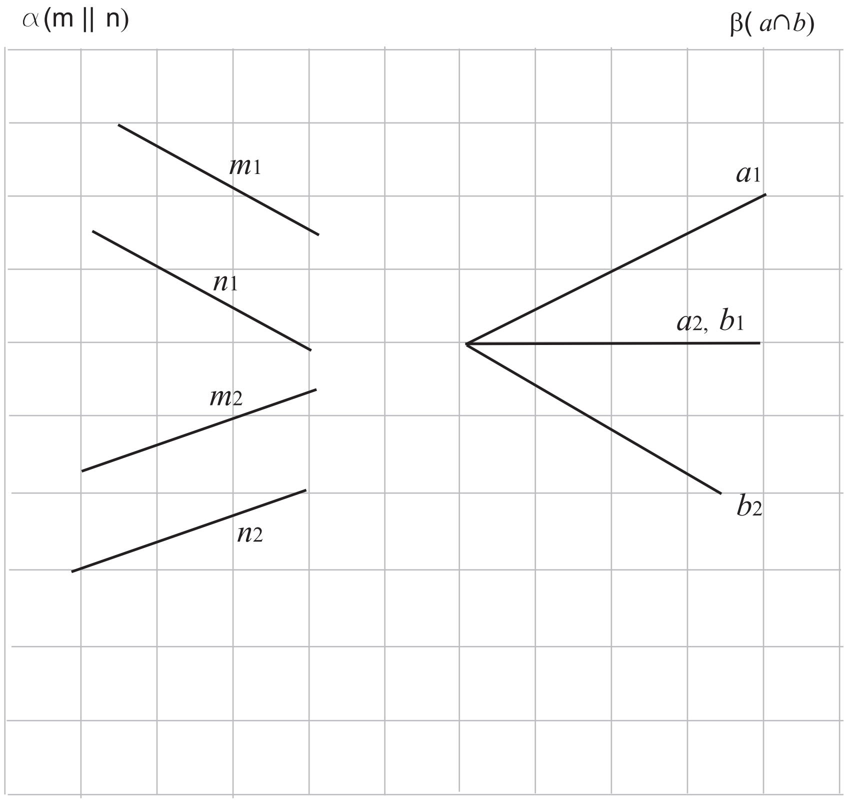


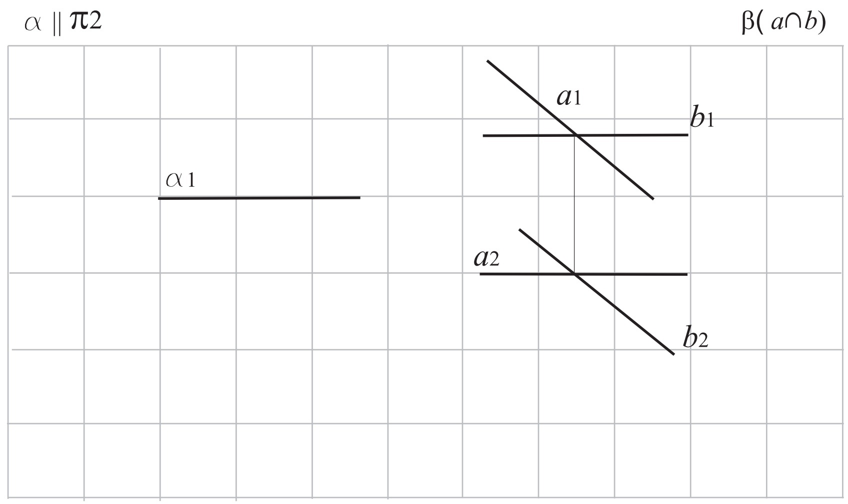
6.4.7. Определить величину угла между плоскостями α и β.

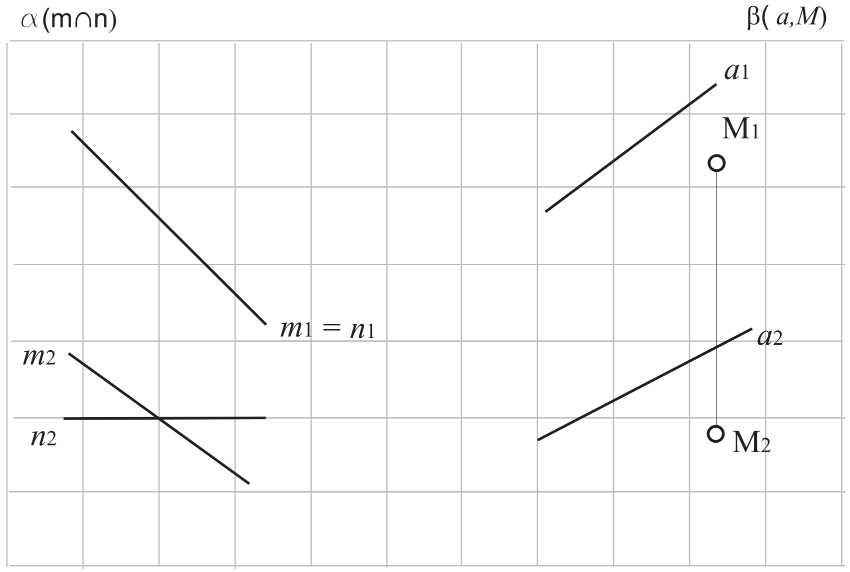
Угол между плоскостями равен углу между перпендикулярами, опущенными из произвольной точки пространства на плоскости.

Алгоритм решения:

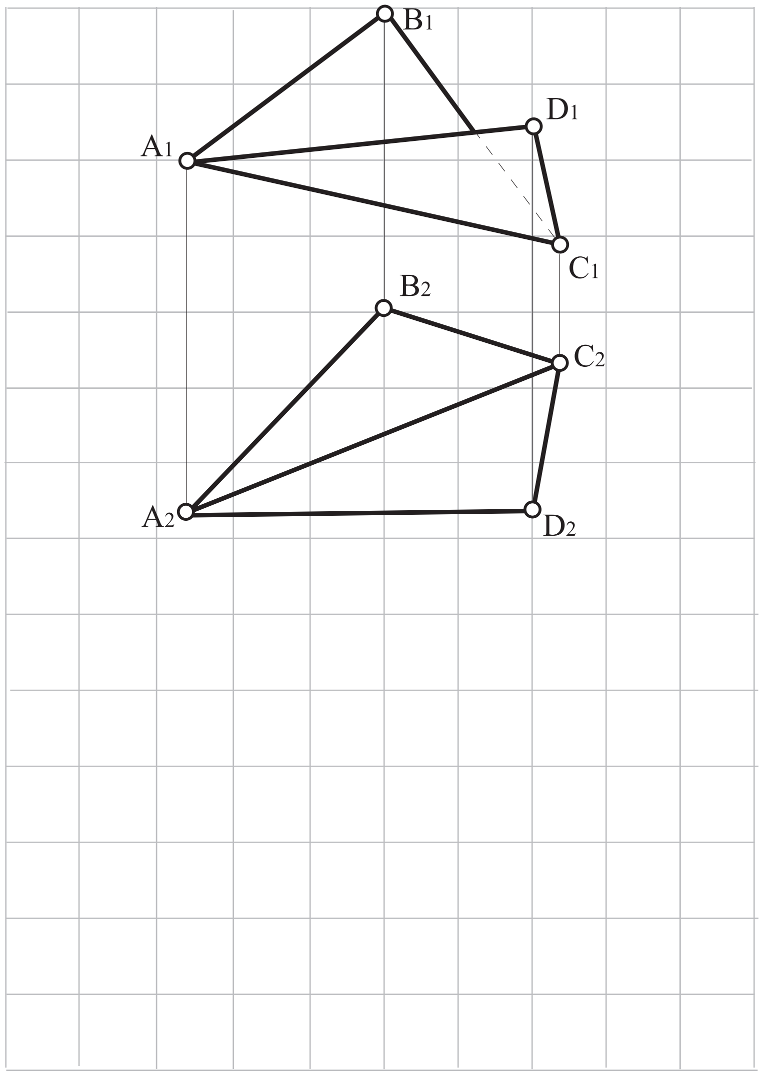
1. Отметить произвольную точку пространства А.
2. Из точки А опустить перпендикуляры (p) и (q) на плоскости α и β соответственно.
3. Определить угол (φ) между прямыми p и q.







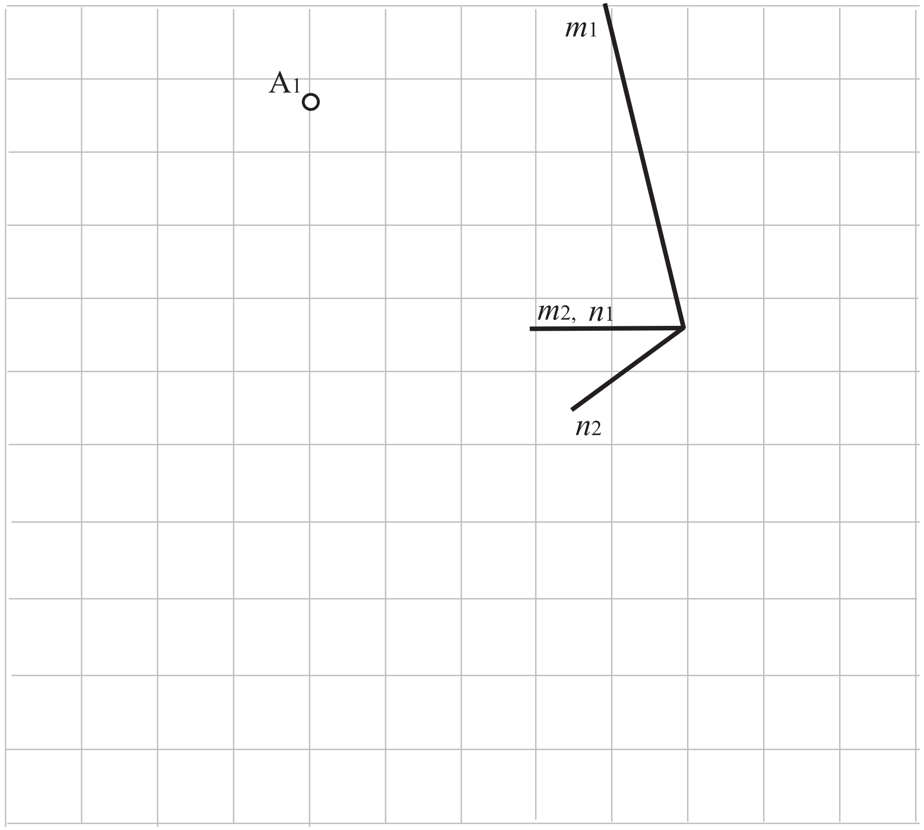
6.4.8. Определить величину двугранного угла между плоскостями $\alpha(ABC)$ и $\beta(ACD)$.



6.4.9.*. В плоскости $\alpha(m, n)$ через точку A, принадлежащую этой плоскости, провести прямые под углом 60^0 к плоскости π_2.

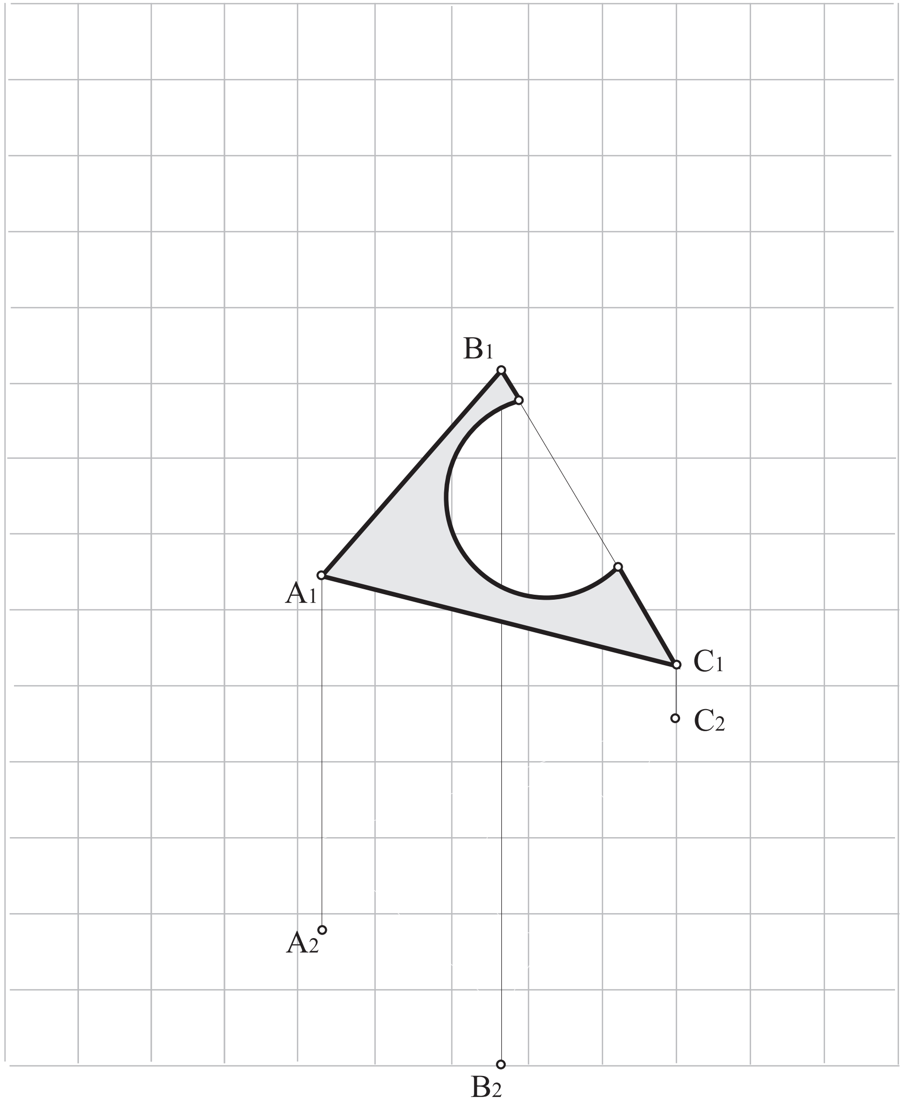
Алгоритм решения:

1. Построить множество прямых, наклоненных к плоскости $\pi 2$ под углом 60^0 и проходящих через точку A (образующие конуса вращения с вершиной в точке A и осью, перпендикулярной плоскости $\pi 2$).
2. Найти пересечение плоскости с конусом (искомые прямые).

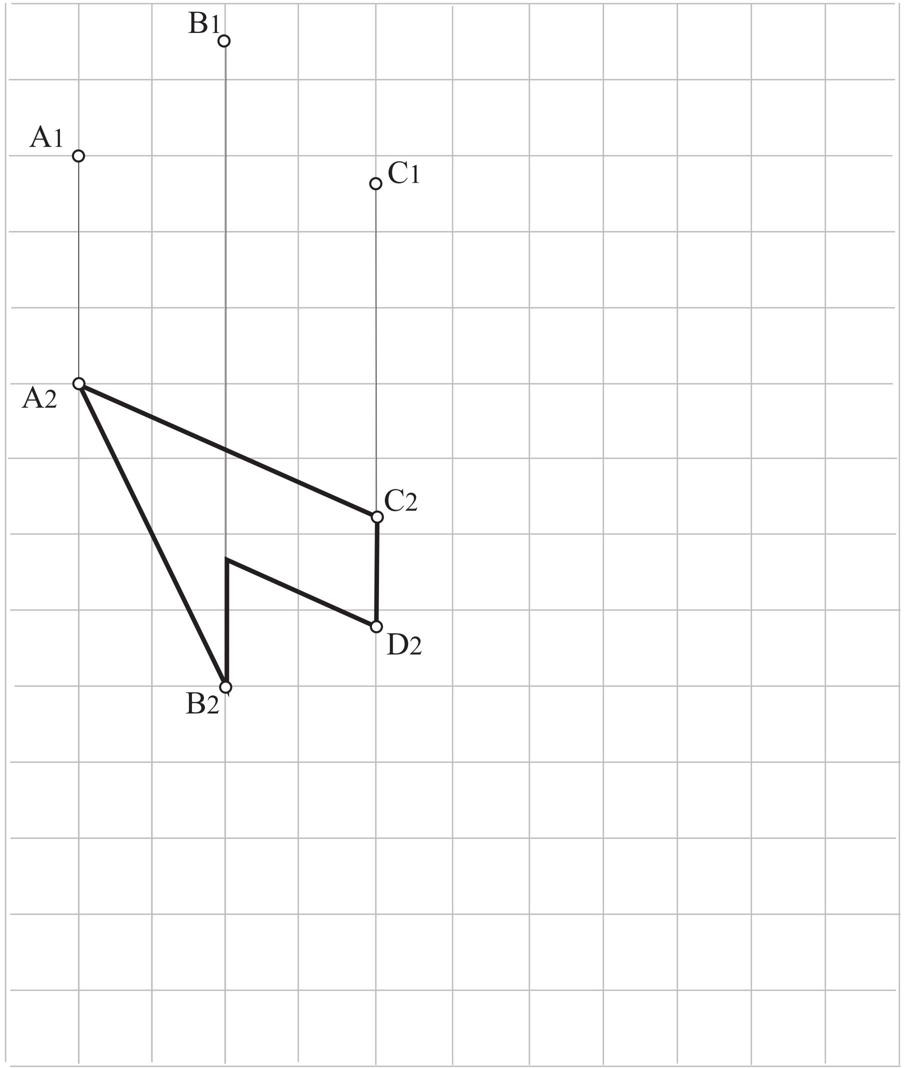


6.5. Определение натуральной величины плоской фигуры

6.5.1. Определить натуральную величину плоской фигуры способом вращения вокруг линии уровня.

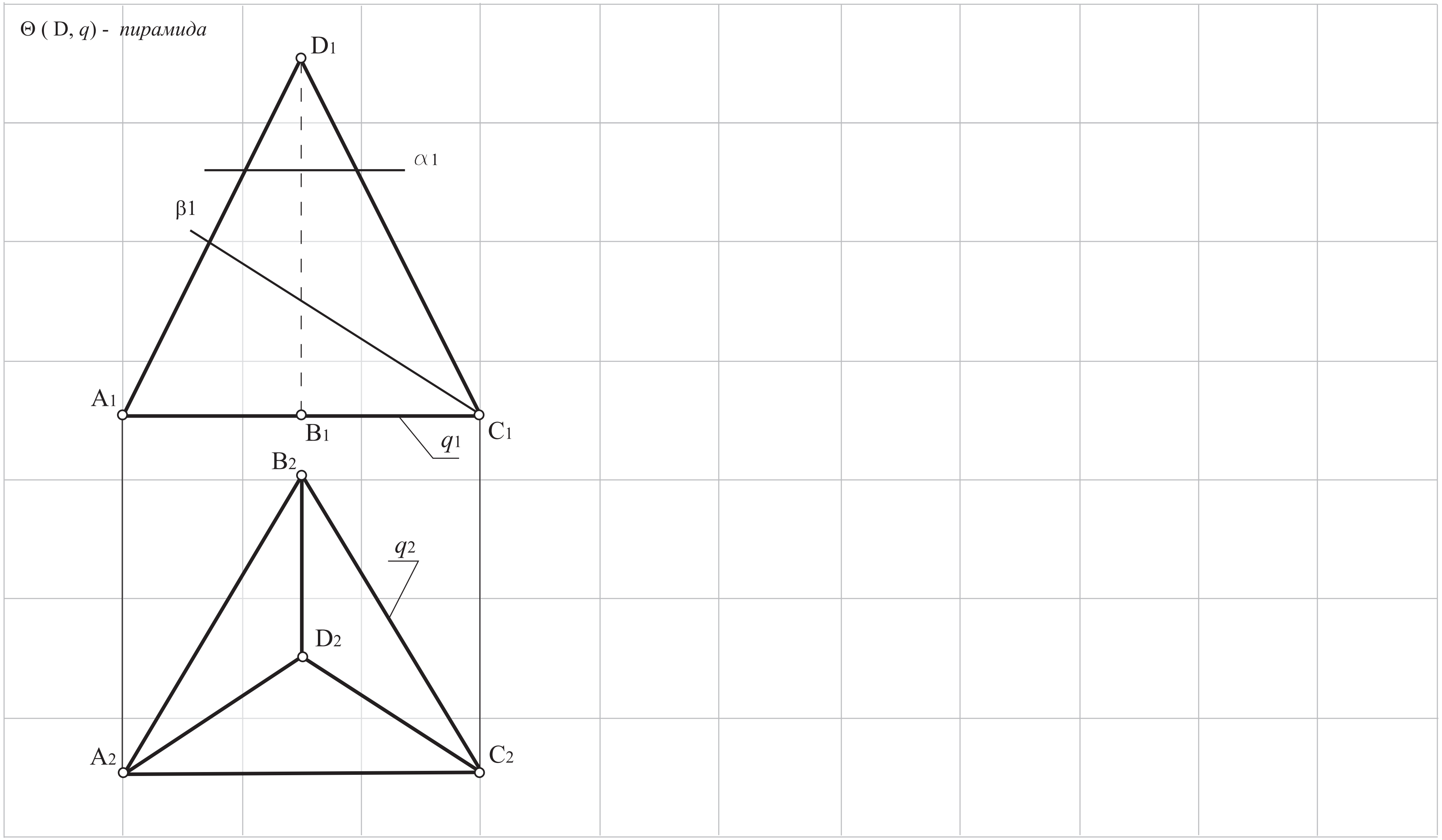


6.5.2. Определить натуральную величину плоской фигуры способом ДОП.

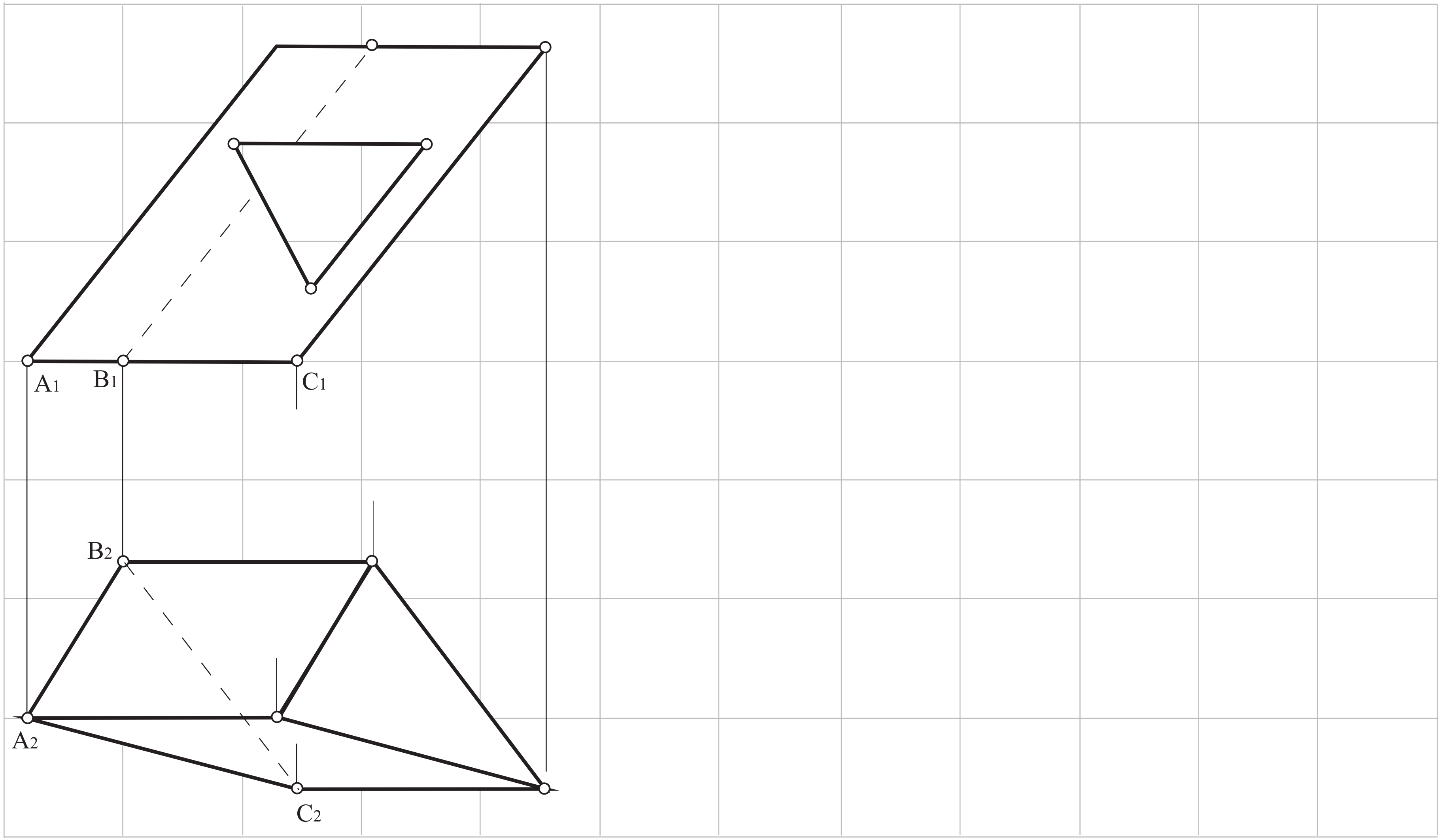


6.6. Развертки поверхностей

6.6.1. Построить развертку боковой поверхности трехгранной пирамиды и нанести на развертку линии пересечения пирамиды с плоскостями α и β.



6.6.2. Построить полную развертку поверхности наклонной трехгранной призмы и нанести на развертку линию выреза с фронтально проецирующей призмой.



6.6.3. Построить геодезическую линию AB, принадлежащую видимой поверхности конуса.

(Геодезическая линия - линия наименьшей длины, соединяющая две точки на поверхности.)