# ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ЛАБОРАТОРИЯ. ЗАКЛАДЫВАЕМ ОСНОВЫ

**Волошинов Денис Вячеславович**

Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича, Санкт-Петербург

Рассматриваются базовые функции ядра системы геометрического моделирования Симплекс. Приводятся аналитические выражения для определения координат точек пересечения окружностей и прямых с учетом возможности задания этих объектов мнимыми значениями. Статья содержит базовый материал, необходимый для понимания работы других геометрических функций системы, предназначенных для решения задач проективной и начертательной геометрии в пространствах различных размерностей с учетом возможности учета мнимых решений.

**Ключевые слова:** конструктивное геометрическое моделирование, пересечение окружностей, пересечение окружности и прямой, Симплекс.

# GEOMETRIC LABORATORY. FOUNDATIONS

**Voloshinov Denis Vyacheslavovich**

The Bonch-Bruevich Saint-Petersburg state university of communications

The article covers the basic functionality of the geometric modeling kernel Simplex system. The author represents analytical expressions for determining the coordinates of the intersection points of circles and straight lines with the possibility of setting these objects with imaginary values. This article contains basic material necessary for an understanding of the work of other geometrical functions of the system, designed to achieve the challenges of the projective and descriptive geometry in spaces of different dimensions with the possibility of taking into account the imaginary solutions.

**Keywords:** Constructive geometrical modeling, the intersection of the circles, the intersection of a circle and a straight line, Simplex.

Представляемая на суд читателей статья посвящена рассмотрению вопросов, хорошо известных и принципиально несложных. В ней рассматривается вопрос о нахождении точек пересечения прямых и окружностей. Рассуждения и выводы, которые в ней приведены, принципиально может без особого труда выполнить любой человек, имеющий математическое образование на уровне выпускника средней школы. Тем не менее автор считает важным и необходимым привести подробные решения этих задач по целому ряду причин.

Первая и, видимо, самая существенная причина заключается в том, что эти задачи являются системообразующими в деле проектирования программно-аппаратных средств, предназначенных для автоматизации решения задач конструктивной геометрии. Именно эти и еще несколько задач подобного характера лежат в основе вычислительного ядра системы Симплекс [1], предназначенной для синтеза приложений, реализующих методы конструктивного геометрического моделирования. Именно эти задачи запрограммированы в системе с использованием аналитического математического аппарата [2], поскольку иных средств реализовать функций системы на ныне существующих языках общетехнического программирования попросту нет. Все остальные функции системы построены, исходя из применения геометрических понятий и алгоритмов, в которых исходные функции рассматриваются как базовые и «неделимые». Это абстрагирование позволяет пользователю применять геометрический метод для решения своих задач во всей присущей этому методу полноте и силе. Хочется еще раз подчеркнуть, хотя позиция по этому вопросу, занимаемая автором, подробно излагалась в [3], что «аналитический реверанс», который приходится делать при разработке системы, не носит на себе черты фатальной неизбежности. Язык аналитики – это не язык устройства вычислительной машины, это система моделирования, которая действительно с высокой эффективностью интерпретирует состояние электрических сигналов в конкретном техническом устройстве, которое вообще и разрабатывалось для того, чтобы обеспечить максимальную эффективность такой интерпретации. Но, исходя из принципа обратимости процесса моделирования [4], «запретить» иную интерпретацию возникающих внутри вычислительной машины сигналов и состояний нельзя, и дело заключается лишь в удобстве применения той или иной интерпретации в задачах конечного потребителя. Поэтому, что для одного – восемь байтов со значениями двух координат, то для другого – точка со вполне определенным геометрическим местом на плоскости. Поэтому спор о том, что первично, а что вторично и, следовательно, подчиненно, бесполезен. Это две стороны одной и той же медали, каждую из которых следует эффективно применять там, где это на текущий момент наиболее рационально.

Представляемый в статье материал позволит заинтересованному читателю использовать его для того, чтобы, возможно, создать собственные инструментальные средства геометрического моделирования. Во всяком случае не нужно будет изобретать то, в чем можно разобраться и использовать по назначению. Секретов здесь никаких нет: математика – она для всех и для каждого. В этом, собственно, состоит вторая причина, по которой публикация материала статьи видится целесообразной.

И все же, несмотря на общеизвестность математических конструкций, представленных в статье, хотелось бы отметить, что при их освещении будет применен подход, открывающий перед конструктивной геометрией новые горизонты. Задачи будут рассматриваться с учетом возможности образования комплекснозначных решений. Необходимость и исключительную важность учета мнимостей в геометрии неоднократно подчеркивали в своих работах А.Г. Гирш, В.А. Короткий и другие ученые [5–10]. Учет таких решений в базовых функциях системы позволяет раз и навсегда избавиться от проблемы невозможности (или исключительной трудоемкости, а следовательно, и непонятности целей этого труда) практически применять комплексную геометрию наряду с действительной. Программный инструмент позволяет не различать в принципе действительные и мнимые образы и действовать с ними, исходя из общих позиций. Еще более важно то, что согласование и отдельное рассмотрение случаев вырождения решений в силу того, что что-то с чем-то не пересеклось, более никого тяготить не будет. Решение получится обязательно, пусть и мнимое, но доступное для использования. Задачи такого типа актуальны, но им пока нет места в CAD-системах из-за недостаточной теоретической, не говоря уже о программной проработке вопроса. Компьютерные технологии избавили начертательную геометрию от циркуля и линейки, как аналитику от счетов и арифмометров, и дали принципиально новые инструменты. Пора забыть эту устаревшую ассоциацию! Метод остался, а инструментальные средства неограниченно расширились. Поэтому нельзя не согласиться с мнением Г.С. Иванова, прозвучавшим на этой конференции [11]. Начертательная геометрия превращается в геометрию нового типа, в современную информационную технологию, открывая все новые и новые возможности для решения сложных задач. Настоящая статья – маленькая крупица в этом деле. Это третья причина.

Четвертая причина заключается в том, что при безусловно внимательном и вдумчивом прочтении материала предполагаемого цикла перед читателем откроется картина, описывающая то, что происходит с давно известными всем нам геометрическими образами в исчерпывающей полноте и взаимосвязи. Недаром народная мудрость гласит, чтобы что-то спрятать понадежнее, необходимо положить это что-то на самое видное место. Поэтому и поиски наши будем вести в направлении, что лежит прямо перед нами. Эти поиски приведут нас к любопытным результатам: обобщению задачи Аполлония и других тесно связанных с ней задач [12–18], раскрытию фундаментальности ее проявлений в геометрии проективной, полному решению и объяснению задачи Ферма [19] о касании сфер с учетом мнимых возникающих в этой задаче образов (в том числе и в приложении к многомерным аналогам этой задачи). Будет дано объяснение взаимосвязи преобразования инверсии и свойств проективной плоскости, представлено обоснование причисления к классу сфер Данделена [20] сфер, ранее к ним не относящихся, будут решены и другие сопутствующие этим геометрические задачи.

Безусловно, изложение всего того, о чем было только что заявлено, – очень большая и скрупулезная работа. Жизнь вмешивается в планы и не всегда позволяет реализовать задуманное. И все же надо начинать. Данная статья – первая, посвященная рассмотрению вопросов, без которых восприятие всего того, о чем предполагается рассказать, было бы делом затруднительным.

Все, о чем пойдет речь далее, не является чем-то принципиально сложным, непознаваемым, требующим каких-то особых знаний. Нельзя сказать, что изложение затронет все вопросы представления образов на комплексной плоскости. Общие вопросы представления мнимостей, разумеется, сложны и сами по себе, еще более непросто предложить средства для автоматизации таких задач и сделать их такими, чтобы они были понятными и удобными. Но ситуация как раз и интересна тем, что начинать можно с простого. Во всем можно разобраться и даже повторить, обладая обычной математической культурой и, конечно, желанием. Для этого есть инструменты, есть примеры и есть необычайный простор для творчества. Это пятое.

И шестое, очень часто от коллег доводится слышать о том, что начертательную геометрию следует преподавать параллельно с геометрией аналитической и даже предпочесть вторую первой.

Корни этой тенденции уходят к Гаспару Монжу – отцу-основателю начертательной геометрии. Он считал соединение вопросов начертательной геометрии и аналитики важным делом. Появление компьютеров подлило масла в огонь, реализация геометрической модели в форме компьютерной программы без перевода в аналитический вид было невозможным – языки программирования требовали представления аналитической записи. Такие языки, как Графор [20] и ФАП-КФ [21], да и многие им подобные программные решения кардинально ситуацию изменить не могли, так или иначе в них не соблюдалась естественная природа геометрического метода, хотя, безусловно, в свое время эти разработки были революционными, и они внесли существенный вклад в дело развития идей автоматизации геометрических методов. Впрочем, учить всех инженерных работников программированию оказалось не слишком перспективным делом и применительно к другим областям человеческой деятельности. И по тем же причинам. Именно этим объясняется появление на рынке проблемно-ориентированных систем решения задач, имитирующих профессиональные приемы работы конечного пользователя. В качестве примера можно привести виртуальную лабораторию LabView [22]. Система Симплекс, разрабатываемая автором, относится к той же категории инструментов.

Бытует мнение, что аналитическое представление проще геометрического и учащиеся понимают его с меньшими затруднениями, что это представление более универсально, чем геометрические схемы. Вопрос этот дискуссионный, и истина лежит где-то посередине. Автор данной статьи, например, предпочитает геометрические методы аналитическим. Нижеследующий материал повествует о математических явлениях исключительно простых: о пересечениях окружностей и прямых. Но даже эти простые задачи, решенные с применением карандаша и листа бумаги (компьютеры в сторону!), легко продемонстрируют читателю, сколь много нужно потратить сил на то, чтобы получить координаты точек, вычисляя их по формулам столбиком (и таблицам Брадиса, между прочим), и сколь легко их получить, если взять циркуль и линейку и начертить требуемые окружности и прямые.

Часто можно услышать, что результат на компьютере можно получить с любой степенью точности. Но, увы, это не так! Сколько ни вычисляй квадратный корень из двух, возводя затем результат в квадрат, исходной двойки не получишь. А следовательно, что-то не пересечется или пересечется, но не там, где надо. Слышится упрек: зачем, дескать, такая точность в пятидесятом знаке. Округлите! Можно, конечно, и округлить, но где для этого основания? Не приведет ли игнорирование количественно-качественного перехода к катастрофе с непрогнозируемыми последствиями?

Подытоживая изложенное, следует заключить, что методическая целесообразность аналитического сопровождения геометрических задач – дело индивидуальных предпочтений и педагогических целей. Аналитические зависимости в одних системах координат просты, в других системах, наоборот, сложны. В отличие, кстати, от прочерченных на бумаге геометрических образов. Относительно сложное геометрическое построение очень быстро обрастает «многоэтажной» аналитикой, за которой весьма непросто увидеть суть решения задачи. Впрочем, как говорит еще одна народная мудрость, – на вкус и цвет товарищей нет. Может быть, кому-то просто нравится считать – и слава Богу! В конце концов, данная статья тоже демонстрирует геометрию без единого чертежа. Формулы и только…

**Задача о нахождении координат точек пересечения двух окружностей**

Пусть на плоскости две окружности заданы своими центрами и радиусами. Введем декартову систему координат и обозначим координаты центров первой и второй окружности через величины ($x_{c1}$, $y_{c1}$) и ($x_{c2}$, $y_{c2}$), а радиусы окружностей через $R_1$ и $R_2$. Все величины предполагаются комплекснозначными. Запишем систему из двух уравнений (1), каждое из которых, взятое по отдельности, определяет положение произвольной точки, инцидидентной описываемой этим уравнением окружности. Заметим, что изначально предполагается, что ни один из центров окружностей не подразумевается совпадающим с центром системы координат.

$$\begin{cases} (x - x_{c1})^2 + (y - y_{c1})^2 = R_1^2, \\ (x - x_{c2})^2 + (y - y_{c2})^2 = R_2^2. \end{cases} \tag{1}$$

Решим эту систему. Раскроем квадраты при скобках. Получим систему уравнений (2), эквивалентную исходной, с разделением переменных по степеням:

$$\begin{cases} x^2 - 2xx_{c1} + x_{c1}^2 + y^2 - 2yy_{c1} + y_{c1}^2 = R_1^2\ , \\ x^2 - 2xx_{c2} + x_{c2}^2 + y^2 - 2yy_{c2} + y_{c2}^2 = R_2^2. \end{cases} \tag{2}$$

Вычтем второе уравнение из первого. Получим уравнение:

$$-2xx_{c1} + 2xx_{c2} + x_{c1}^2 - x_{c2}^2 - 2yy_{c1} + 2yy_{c2} + y_{c1}^2 - y_{c2}^2 = R_1^2 - R_2^2. \tag{3}$$

Перегруппируем компоненты уравнения таким образом, чтобы разделить переменные и свободные члены.

$$2x\left(x_{c2} - x_{c1}\right) + 2y\left(y_{c2} - y_{c1}\right) = R_1^2 - R_2^2 - x_{c1}^2 + x_{c2}^2 - y_{c1}^2 + y_{c2}^2. \tag{4}$$

Обозначим через $\Delta_x$ и $\Delta_y$ приращения координат центров окружностей по соответственным осям:

$$\Delta_x = x_{c2} - x_{c1}, \quad \Delta_y = y_{c2} - y_{c1}. \tag{5}$$

Члены, записанные в правой части уравнения, в совокупности представляют собой свободную от $x$ или $y$ величину $z$:

$$z = R_1^2 - R_2^2 - x_{c1}^2 + x_{c2}^2 - y_{c1}^2 + y_{c2}^2. \tag{6}$$

Следует обратить внимание на то, что вне зависимости от того, действительными или комплексными будут переменные правой части формулы (6), их возведение во вторую степень обеспечит действительность величины $z$.

Представим уравнение (4) с учетом введенных обозначений (5) и (6) в форме (7):

$$2x\Delta_x + 2y\Delta_y = z. \tag{7}$$

Выразим переменную $x$ через переменную $y$.

$$x = \frac{z - 2y\Delta_y}{2\Delta_x}. \tag{8}$$

Подставим выражение, полученное для $x$, в первое уравнение системы (1). Получим запись следующего вида:

$$\left(\frac{z - 2y\Delta_y}{2\Delta_x}\right)^2 - 2\frac{z - 2y\Delta_y}{2\Delta_x}x_{c1} + x_{c1}^2 + y^2 - 2yy_{c1} + y_{c1}^2 = R_1^2. \tag{9}$$

Раскроем скобки в (9) и приведем подобные:

$$\begin{gathered}
\frac{z^2 - 4zy\Delta_y + 4y^2\Delta_y^2}{4\Delta_x^2} - \frac{4z\Delta_x - 8y\Delta_y\Delta_x}{4\Delta_x^2}x_{c1} + \frac{4\Delta_x^2\left(x_{c1}^2 + y^2 - 2yy_{c1} + y_{c1}^2 - R_1^2\right)}{4\Delta_x^2} = \\
= \frac{z^2}{4\Delta_x^2} - \frac{zy\Delta_y}{\Delta_x^2} + \frac{y^2\Delta_y^2}{\Delta_x^2} - \frac{zx_{c1}}{\Delta_x} + 2\frac{y\Delta_y x_{c1}}{\Delta_x} + x_{c1}^2 + y^2 - 2yy_{c1} + y_{c1}^2 - R_1^2 = \\
= y^2\left(\frac{\Delta_y^2}{\Delta_x^2} + 1\right) + y\left(2\frac{\Delta_y x_{c1}}{\Delta_x} - \frac{z\Delta_y}{\Delta_x^2} - 2y_{c1}\right) + \frac{z^2}{4\Delta_x^2} - \frac{zx_{c1}}{\Delta_x} + x_{c1}^2 + y^2 + y_{c1}^2 - R_1^2 = 0.
\end{gathered} \tag{10}$$

Разумеется, искать решение имеет смысл лишь в том случае, если комплексная разность $\Delta_x \neq 0$. Запись (10) представляет собой квадратное уравнение вида $ay^2 + by + c = 0$ относительно переменной $y$. Выпишем отдельно коэффициенты полученного квадратного уравнения:

$$a = \frac{\Delta_y^2}{\Delta_x^2} + 1;$$

$$b = \frac{2\Delta_y}{\Delta_x} x_{c1} - \frac{z\Delta_y}{\Delta_x^2} - 2y_{c1}; \tag{11}$$

$$c = \frac{z^2}{4\Delta_x^2} - \frac{z}{\Delta_x} x_{c1} + x_{c1}^2 + y_{c1}^2 - R_1^2 = \left(\frac{z}{2\Delta_x} - x_{c1}\right)^2 + y_{c1}^2 - R_1^2.$$

Коэффициенты $a$ и $c$ действительны в силу того, что члены, их составляющие, возводятся в квадраты, следовательно, в них не могут получиться мнимые значения. В отличие от коэффициентов $a$ и $c$ коэффициент $b$ может иметь комплексное значение.

Обозначим дискриминант квадратного уравнения через $D$. Поскольку $D = b^2 - 4ac$, подкоренное выражение действительно, следовательно, радикал – также действительное число.

Зная коэффициенты квадратного уравнения, нетрудно определить его корни:

$$y_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = y_r + \delta_y;$$

$$y_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = y_r - \delta_y, \tag{12}$$

где $y_r = -\frac{b}{2a}$; $\delta_y = \frac{\sqrt{D}}{2a}$.

Выполнив подстановку полученных значений в (8), получим значения $x$-координат точек пересечения окружностей:

$$x_1 = \frac{z - 2y_1\Delta_y}{2\Delta_x} = \frac{z - \frac{-b + \sqrt{D}}{a}\Delta_y}{2\Delta_x} = \left(\frac{z}{2\Delta_x} - \frac{b\Delta_y}{2a\Delta_x}\right) + \frac{\sqrt{D}\Delta_y}{2a\Delta_x} = x_r + \delta_x,$$

$$x_2 = \frac{z - 2y_2\Delta_y}{2\Delta_x} = \frac{z - \frac{-b - \sqrt{D}}{a}\Delta_y}{2\Delta_x} = \left(\frac{z}{2\Delta_x} - \frac{b\Delta_y}{2a\Delta_x}\right) - \frac{\sqrt{D}\Delta_y}{2a\Delta_x} = x_r - \delta_x, \tag{13}$$

где $x_r = \frac{z}{2\Delta_x} - \frac{b\Delta_y}{2a\Delta_x}$, $\delta_x = \frac{\sqrt{D}\Delta_y}{2a\Delta_x}$.

Из приведенных формул видно, что точки пересечения окружностей $(x_1, y_1)$ и $(x_2, y_2)$ располагаются симметрично относительно некоторой точки с координатами $(x_r, y_r)$, следовательно, их можно рассматривать как точки, задающие диаметр окружности с центром в точке с координатами $(x_r, y_r)$. Радиус $R_r$ такой окружности можно подсчитать, как расстояние между центром с координатами $(x_r, y_r)$ и одной из точек, например $(x_1, y_1)$. Запишем его:

$$R_r = \sqrt{\left(\delta_x^2 + \delta_y^2\right)} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{D}\Delta_y}{2a\Delta_x}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{D\Delta_y^2}{4a^2\Delta_x^2} + \frac{D\Delta_x^2}{4a^2\Delta_x^2}} = \\ = \sqrt{\frac{D}{4a^2}\frac{\left(\Delta_y^2+1\right)}{\Delta_x^2}} = \frac{\sqrt{D}\left(\Delta_y^2+1\right)}{2a\Delta_x}. \tag{14}$$

В том случае, если координаты $(x_1, y_1)$ и $(x_2, y_2)$ точек пересечения окружностей действительны, приращения координат $\delta_x$ и $\delta_y$ также действительны, поэтому подкоренное выражение обеспечивает действительность радиуса $R_r$. Если же координаты $(x_1, y_1)$ и $(x_2, y_2)$ имеют комплексные значения, то, как видно из формул, эти значения могут быть только комплексно-сопряженными. Действительная часть соответственных координат имеет одно и то же значение, поэтому значения приращений координат определяются исключительно мнимыми частями, следовательно, $\delta_x$ и $\delta_y$ мнимы. Будучи возведенными в квадрат, в сумме эти величины образуют отрицательное подкоренное выражение, из чего следует, что радиус $R_r$ получит мнимое значение (действительная часть равна нулю). Из изложенного следует сделать вывод о том, что окружность, построенная на двух мнимых комплексно-сопряженных точках, рассматриваемых как диаметральные точки этой окружности, будет иметь вещественный центр и мнимый радиус. Числовое выражение координат центра и величины радиуса такой окружности представлены формулами (12–14).

Разумеется, все проведенные рассуждения справедливы в том случае, если $\Delta_x \neq 0$. Если же расположение исходных окружностей оказалось таким, что $\Delta_x = 0$, то тогда следует решить систему (1) относительно переменной $x$ и провести рассуждения, аналогичные проведенным, делая в формулах формальную замену компонентов $x$ на $y$ и наоборот. Описание этого решения здесь не приводится, так как оно формально и не представляет никакой сложности.

Понятно, что если и $\Delta_y = 0$, то окружности окажутся концентрическими, и в этом случае операция их пересечения оказывается неопределенной.

**Задача о нахождении координат точек пересечения прямой и окружности**

Теперь приведем решение задачи пересечения прямой линии и окружности. Пусть произвольная окружность имеет комплекснозначный радиус $R$, центр окружности задан точкой $(x_c, y_c)$. Прямую линию выразим каноническим уравнением (15), устанавливающим зависимость положения точки с комплекснозначными координатами $x$ и $y$, от двух заданных не совпадающих друг с другом точек с комплекснозначными координатами $(x_1, y_1)$ и $(x_2, y_2)$, через которые проходит эта прямая:

$$\begin{cases} (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2, \\ \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \end{cases} \tag{15}$$

Обозначим $R^2$ через $Q$. Преобразуем второе уравнение системы таким образом, чтобы переменная $y$ выразилась через переменную $x$:

$$\begin{gathered} y = \frac{(x - x_1)(y_2 - y_1)}{x_2 - x_1} + y_1 = \frac{x(y_2 - y_1) - x_1 y_2 + x_1 y_1 + y_1 x_2 - y_1 x_1}{x_2 - x_1} = \\ = \frac{x(y_2 - y_1) - x_1 y_2 + y_1 x_2}{x_2 - x_1} = \frac{x(y_2 - y_1) - z}{x_2 - x_1}. \end{gathered} \tag{16}$$

Представим величиной $z$ выражение $z = x_1 y_2 - y_1 x_2$.

Подставим $y$ из уравнения (16) в первое уравнения системы (15). Получим:

$$(x - x_c)^2 + \left( \frac{x(y_2 - y_1) - z}{x_2 - x_1} - y_c \right)^2 - Q = 0. \tag{17}$$

Приведем все компоненты уравнения (17) к общему знаменателю:

$$\frac{(x - x_c)^2 (x_2 - x_1)^2}{(x_2 - x_1)^2} + \frac{\left(x(y_2 - y_1) - z - y_c(x_2 - x_1)\right)^2}{(x_2 - x_1)^2} - \frac{Q(x_2 - x_1)^2}{(x_2 - x_1)^2} = 0. \tag{18}$$

Приведем уравнение к квадратному, полагая, что $x_2 - x_1 \neq 0$. Умножив и числитель, и знаменатель на $(x_2 - x_1)^2$, получим уравнение следующего вида:

$$\left(x-x_c\right)^2\left(x_2-x_1\right)^2+\left(x(y_2-y_1)-z-y_c\left(x_2-x_1\right)\right)^2-Q\left(x_2-x_1\right)^2=0. \quad (19)$$

Введя сокращенные обозначения $\Delta_x = x_2 - x_1$ и $\Delta_y = y_2 - y_1$ приращениям координат точек, через которые проведена прямая линия, получим:

$$\left(x-x_c\right)^2\Delta_x^2+\left(x\Delta_y-z-y_c\Delta_x\right)^2-Q\Delta_x{}^2=0. \quad (20)$$

Раскроем квадраты:

$$(x^2-2xx_c+x_c^2)\Delta_x^2+\left(x\Delta_y-z-y_c\Delta_x\right)\left(x\Delta_y-z-y_c\Delta_x\right)-Q\Delta_x{}^2=0, \quad (21)$$

а затем и скобки. Получим уравнение:

$$\begin{aligned}&x^2\Delta_x^2-2xx_c\Delta_x^2+x_c^2\Delta_x^2+x^2\Delta_y^2-x\Delta_y z-x\Delta_y y_c\Delta_x-xz\Delta_y+\\&+z^2+zy_c\Delta_x-x\Delta_y y_c\Delta_x+zy_c\Delta_x+y_c^2\Delta_x^2-Q\Delta_x{}^2=0.\end{aligned} \quad (22)$$

Сгруппируем члены при соответственных степенях *x*:

$$\begin{aligned}&x^2\left(\Delta_x^2+\Delta_y^2\right)-2x(x_c\Delta_x^2+\Delta_y z+\Delta_y y_c\Delta_x)+\\&+x_c^2\Delta_x^2+z^2+2zy_c\Delta_x+y_c^2\Delta_x^2-Q\Delta_x{}^2=0.\end{aligned} \quad (23)$$

и приведем полученное уравнение к виду $ax^2+bx+c=0$.

Коэффициенты такого уравнения будут представлены выражениями (24):

$$\begin{aligned}&a=\Delta_x^2+\Delta_y^2,\\&b=x_c\Delta_x^2+\Delta_y z+\Delta_y y_c\Delta_x,\\&c=x_c^2\Delta_x^2+z^2+2zy_c\Delta_x+y_c^2\Delta_x^2-Q\Delta_x{}^2=x_c^2\Delta_x^2-Q\Delta_x{}^2+\left(z+y_c\Delta_x\right)^2.\end{aligned} \quad (24)$$

Коэффициенты *a* и *c* действительны. Коэффициент *b* может иметь комплексное значение. Дискриминант квадратного уравнения может быть подсчитан, как $D = b^2 - 4ac$, и его значение, безусловно, действительно. Если $D \geq 0$, то решение уравнения имеет только действительные корни, в противном случае – мнимые. Координаты точек пересечения прямой линии и окружности ($x_{t1}$, $y_{t1}$) и ($x_{t2}$, $y_{t2}$) могут быть вычислены по формулам:

$$x_{t1} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = x_r + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = x_r + \delta_x,$$
$$x_{t2} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = x_r - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = x_r - \delta_x,$$
$$y_{t1} = \frac{x_{t1}\Delta_y - z}{\Delta_x} = \frac{\left(x_r + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\Delta_y - z}{\Delta_x} = y_r + \delta_y, \tag{25}$$
$$y_{t2} = \frac{x_{t2}\Delta_y - z}{\Delta_x} = \frac{\left(x_r - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\Delta_y - z}{\Delta_x} = y_r - \delta_y,$$

где $x_r = -\frac{b}{2a}, \delta_x = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $y_r = x_r \frac{\Delta_y}{\Delta_x}, \delta_y = \frac{\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - z}{\Delta_x}$.

Так же, как и в рассмотренной ранее задаче о пересечении двух окружностей, мы можем определить на точках ($x_{t1}$, $y_{t1}$) и ($x_{t2}$, $y_{t2}$) окружность с центром ($x_r$, $y_r$), если рассматривать эти точки, как задающие ее диаметр. Все рассуждения, которые можно провести в отношении этой окружности, в точности повторяют рассмотренные ранее рассуждения, поэтому они здесь не приводятся. В заключение рассмотрения вопроса следует сказать, что возможность построения окружности с мнимым радиусом и связь этой окружности с действительной окружностью, проведенной с тем же центром, но с вещественным радиусом той же величины, что и у мнимой, позволяют получить исключительно удобный и практичный конструктивный способ построения окружностей, проходящих через одну действительную и две мнимые комплексно-сопряженные точки. Хочется подчеркнуть, что эта задача является исключительно важной, поскольку возможность ее инструментального исполнения позволяет рассматривать и практически реализовывать задачи проективной геометрии с учетом мнимости возникающих в них образов. Подробное освещение этой задачи будет осуществлено в одной из следующих работ планируемого цикла статей, посвященных рассмотрению вопросов реализации проективных преобразований инверсии и, возможно, многих других преобразований с учетом мнимости образов, существенно расширяющих сферы приложения методов конструктивной геометрии.

**Задача о нахождении точки пересечения двух прямых линий**

Изложение вопросов пересечения простейших геометрических образов на плоскости было бы неполным, если не рассмотреть задачу о нахождении однородных координат $\left(P_x, P_y, P_w\right)$ точки пересечения двух прямых линий, где $\left(x_1, y_1, w_1\right)$, $\left(x_2, y_2, w_2\right)$ – комплексные однородные координаты точки, задающие одну прямую, а $\left(x_3, y_3, w_3\right)$, $\left(x_4, y_4, w_4\right)$ – комплексные однородные координаты точки, задающие одну прямую.

В том случае, если $\left(x_1 - x_2\right)\left(y_3 - y_4\right) - \left(y_1 - y_2\right)\left(x_3 - x_4\right) \neq 0$, исходные прямые не параллельны, и координаты точки пересечения рассчитываются по формулам:

$$
\begin{aligned}
&P_x = \frac{\left(x_1 y_2 - y_1 x_2\right)\left(x_3 - x_4\right) - \left(x_1 - x_2\right)\left(x_3 y_4 - y_3 x_4\right)}{\left(x_1 - x_2\right)\left(y_3 - y_4\right) - \left(y_1 - y_2\right)\left(x_3 - x_4\right)}, \\
&P_y = \frac{\left(x_1 y_2 - y_1 x_2\right)\left(y_3 - y_4\right) - \left(y_1 - y_2\right)\left(x_3 y_4 - y_3 x_4\right)}{\left(x_1 - x_2\right)\left(y_3 - y_4\right) - \left(y_1 - y_2\right)\left(x_3 - x_4\right)}, \\
&P_w = 1.
\end{aligned}
\tag{26}
$$

При условии $\left(x_1 - x_2\right)\left(y_3 - y_4\right) - \left(y_1 - y_2\right)\left(x_3 - x_4\right) = 0$ прямые линии либо параллельны, либо совпадают. Обычно считается, что в этом случае прямые пересекаются в бесконечно удаленной точке, заданной направлением этой прямой. Это направление можно легко задать, если указать в координатах $x$ и $y$ точки характеристики этого направления, а в $w$ поместить значение 0.

$$
\begin{aligned}
&P_x = x_2 - x_1, \\
&P_y = y_2 - y_1, \\
&P_w = 0 .
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Однако следует обратить внимание читателей на факт возникающих здесь противоречий. Поскольку с точки зрения геометрии прямая линия и точка – представители разных множественных классов, то с точки зрения теории множеств при поиске точки пересечения прямых выполняется операция по сопоставлению элементов двух однородных множеств – точечных рядов, лежащих на носителях, собственно прямых, на предмет выявления общего элемента двух рядов. При наличии несовпадающих прямых такой элемент единствен. В том же случае, если исходные прямые совпадают, то общими элементами становятся все точки прямой, поэтому говорить о том, что совпадающие прямые пересекаются в бесконечно удаленной точки, вообще говоря, некорректно. Совпадающие прямые как представители класса прямых в данном случае пересекаются по прямой линии, являющейся носителем всех инцидентных с ними точек.

Геометрическая система предполагает наличие единственной и неизменной бесконечно удаленной прямой плоскости, которая имеет специальное название *iline*. Любая прямая пересекается с прямой *iline* в бесконечно удаленной точке, задаваемой определением (27). В то же время любая прямая может быть проведена через бесконечно удаленную (несобственную) точку и собственную точку плоскости. Этим обеспечивается отсутствие исключительных ситуаций в алгоритмах, в результате действия которых прямые линии, пересекавшиеся в собственной точке и через которую проводилась какая-либо третья линия, стали параллельными. Проведение прямой линии через две несобственные точки приведет к заданию бесконечно удаленной прямой плоскости.

И в заключение рассмотрим еще одну задачу, которую несложно решить с помощью задач, рассмотренных ранее, – построение ортогональной проекции вещественной точки на прямую линию. Безусловно, такую задачу можно выразить аналитически, однако не составит труда выполнить простые геометрические построения.

Проведем через точку, которую собираемся проецировать на прямую, окружность произвольного радиуса и найдем точки ее пересечения с исходной прямой. Результат может получиться как вещественный, так и мнимый. Проведем через полученные точки окружность, взяв эти точки как диаметральные. Независимо от того, какая образуется при этом окружность, ее центр – вещественная точка. Она и является ортогональной проекцией исходной точки на исходную прямую.

Описание операции ортогонального проецирования мнимых точек на действительную прямую линию отложим на некоторое время. Освещение этого вопроса потребует отсылки к образам и конструкциям, возникающим на проективной плоскости, в частности, к инволюционным преобразованиям, индуцируемым в рядах точек на проективной плоскости, что выходит за рамки темы данной статьи.

Автор надеется на то, что те несложные вопросы, которые были затронуты в статье, послужат полезным исходным материалом для тех исследователей, кто действительно заинтересован в разработке программ и систем геометрического моделирования, создании собственных виртуальных геометрических лабораторий. Для справки в конце статьи приведен перечень формул, необходимых для выполнения простейших операций с комплексными числами. Все они находят применение в задачах, речь о которых шла в настоящей статье.

$$Z = X + Y:$$
$$\mathrm{Re}(Z) = \mathrm{Re}(X) + \mathrm{Re}(Y),$$
$$\mathrm{Im}(Z) = \mathrm{Im}(X) + \mathrm{Im}(Y).$$
$$Z = X - Y:$$
$$\mathrm{Re}(Z) = \mathrm{Re}(X) - \mathrm{Re}(Y),$$
$$\mathrm{Im}(Z) = \mathrm{Im}(X) - \mathrm{Im}(Y).$$

$$Z = X \times Y:$$
$$\mathrm{Re}(Z) = \mathrm{Re}(X) \times \mathrm{Re}(Y) - \mathrm{Im}(X) \times \mathrm{Im}(Y),$$
$$\mathrm{Im}(Z) = \mathrm{Re}(X) \times \mathrm{Im}(Y) + \mathrm{Re}(Y) \times \mathrm{Im}(Z).$$
$$Z = X / Y:$$
$$\mathrm{Re}(Z) = \frac{\mathrm{Re}(X) \times \mathrm{Re}(Y) + \mathrm{Im}(X) \times \mathrm{Im}(Y)}{\sqrt{(\mathrm{Re}(Y))^2 + (\mathrm{Im}(Y))^2}},$$
$$\mathrm{Im}(Z) = \frac{\mathrm{Re}(Y) \times \mathrm{Im}(X) - \mathrm{Re}(X) \times \mathrm{Im}(Y)}{\sqrt{(\mathrm{Re}(Y))^2 + (\mathrm{Im}(Y))^2}}.$$

**Список литературы**

1. Инструмент для геометрического моделирования. Каким ему быть? // Проблемы качества графической подготовки: традиции и инновации: материалы V Междунар. интернет-конф.; февраль-март 2015 г. – Пермь, 2015.

2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. Для научных работников и инженеров. – М., 1973. – 832 с.

3. О перспективах развития геометрии и ее инструментария. // Проблемы качества графической подготовки: материалы IV Междунар. интернет-конф.; февраль-март 2014 г. – Пермь, 2014.

4. Вальков К.И. Введение в теорию моделирования. – Л.: Изд-во ЛИСИ, 1974. – 152 с.

5. Гирш А.Г. Наглядная мнимая геометрия. – М.: Маска, 2008. – 216 с.

6. Гирш А.Г. Задание и построение квадрики // Проблемы качества графической подготовки: материалы VII Междунар. интернет-конф. «Качество графической подготовки. Проблемы, традиции, инновации»; февраль-март 2017 г. – Пермь, 2017.

7. Гирш А.Г. Комплексная геометрия – евклидова и псевдоевклидова. – М.: Маска, 2013. – 216 с.

8. Гирш А.Г., Короткий В.А. Графические алгоритмы реконструкции кривой второго порядка, заданной мнимыми элементами // Геометрия и графика. – 2016. – Т. 4. – № 4. – С. 19–30. DOI: 10.12737/22840.

9. Короткий В.А. Мнимые элементы в алгебре и геометрии // Проблемы качества графической подготовки: традиции и инновации: материалы IV Междунар. интернет-конф.; февраль-март 2016 г. – Пермь, 2016.

10. Короткий В.А. Вещественные конические сечения на комплексной плоскости // Проблемы качества графической подготовки: материалы VII Междунар. интернет-конф. «Качество графической подготовки. Проблемы, традиции, инновации»; февраль-март 2017 г. – Пермь, 2017.

11. Дмитриева И.М., Иванов Г.С. О профессиональных компетенциях в преподавании начертательной геометрии // Проблемы качества графической подготовки: материалы VII Междунар. интернет-конф. «Качество графической подготовки. Проблемы, традиции, инновации»; февраль-март 2017 г. – Пермь, 2017.

12. Аракелян А.Г. Бесконечные последовательности взаимно касающихся окружностей // Геометрия и графика. – 2016. – Т. 4.

13. Сальков Н.А. Циклида Дюпена *и* кривые второго порядка. Ч. 1 // Геометрия и графика. – 2016. – Т. 4. – № 2. – С. 19–28.

14. Сальков Н.А. Циклида Дюпена *и* кривые второго порядка. Ч. 2 // Геометрия и графика. – 2016. – Т. 4. – № 3. – С. 17–28.

15. Сальков Н.А. Свойства циклид Дюпена и их применение. Ч. 1 // Геометрия и графика. – 2015. – Т. 3. – № 1. – С. 16–25.

16. Сальков Н.А. Свойства циклид Дюпена и их применение. Ч. 2 // Геометрия и графика. – 2015. – Т. 3. – № 2. – С. 9–22.

17. Сальков Н.А. Свойства циклид Дюпена и их применение. Ч. 3: сопряжения // Геометрия и графика. – 2016. – Т. 3. – № 4.

18. Хейфец А.Л. Геометрическая точность компьютерных алгоритмов конструктивных задач // Проблемы качества графической подготовки: традиции и инновации: материалы IV Междунар. интернет-конф.; февраль-март 2016 г. – Пермь, 2016.

19. ГРАФОР: комплекс графических программ на Фортране / Ю.М. Баяковский [и др.] / Ин-т прикладной математики АН СССР. – М., 1972–1977.

20. Горелик А.Г. Автоматизация инженерно-графических работ с помощью ЭВМ. – Минск: Вышейшая школа, 1980.

21. Трэвис Дж., Кринг Дж. LabView для всех. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: ДМК Пресс, 2011. – 904 с.